Name: Gruppe: Matr. Nr.:

Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 7. 12. 2012, 2012W

1 Indexschreibweise (30 Punkte)

Vereinfachen und berechnen Sie $\operatorname{rot}\left((\mathbf{q}\times\mathbf{x})/r\right)$, wobei $\mathbf{q}$ ein konstanter Vektor, $r=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$, und $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).

2 Delta-Distribution (30 Punkte)

Berechnen Sie

$$I=\int_{-2}^{\infty}ds\int_{-\infty}^{2}dt\,\delta(2s+3t+6)\delta(6st)h(s,t).$$

3 Koordinatentransformation (40 Punkte)

Die Koordinaten $x'^1=r$, $x'^2=\varphi$ seien definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(r,\varphi)=x^i\mathbf{e}_i=\begin{pmatrix}x^1(r,\varphi)\\x^2(r,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(r,\varphi)\\y(r,\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\r\varphi\end{pmatrix},$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}=\left\{(1,0)^T,(0,1)^T\right\}$.

a) Berechnen Sie die lokale, infinitesimale Transformationsmatrix ${a_i}^j$ von kartesischen Koordinaten in die neuen Koordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen (nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$. [10]

b) Berechnen Sie den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal? [10]

c) Berechnen Sie die inverse Transformationsmatrix ${a'_i}^j$, und stellen Sie mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i=(0,2)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}'=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$ dar. [10]

d) Berechnen Sie $\left(w_i\delta_j^k-g_{ij}w^k\right){A^{ij}}_k$, wobei $v^i=(0,2)^T$, $w'_i=(0,1)$, und ${A^{ij}}_k=v^iv^jw_k$. [10]

Hinweis: Die kovarianten Basisvektoren transformieren wie $\mathbf{e}'_i={a_i}^j\mathbf{e}_j$, die kontravarianten Vektorkomponenten wie $dx^j(\mathbf{x})={a_i}^j(\mathbf{x})dx'^i(\mathbf{x})$, mit ${a_i}^j=\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$.