Name: Gruppe: Matr. Nr.:

Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 18. 1. 2013, 2012W

1 Separationsansatz (30 Punkte)

Separieren Sie folgende Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x,y,z) = (x+z)\,\Phi(x,y,z)$$

in Differentialgleichungen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen.

2 Fuchssche Klasse (30 Punkte)

a) Folgende Differentialgleichung gehört der Fuchsschen Klasse an:

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0.$$

Wie lauten die charakteristischen Exponenten $\sigma_{1,2}$ an der Stelle $x = 0$? (An der Stelle $x = \infty$ müssen sie nicht berechnet werden.) [15]

b) Geben Sie eine Lösungsbasis mit Hilfe eines Ansatzes für eine generalisierte Potenzreihe für $y(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ an. (Man erhält für dieses spezielle Beispiel die vollständige Lösungsbasis, ohne das Reduktionsverfahren von d'Alembert anwenden zu müssen.) [15]

Hinweis:
Für $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ gilt:
Charakteristische Exponenten erfüllen $\sigma(\sigma-1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0$
mit $\alpha_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)p_1(x)$, $\beta_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 p_2(x)$.

BITTE WENDEN!

3 Greensche Funktion (40 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung mit konstantem α

$$\left(-i\frac{d}{dx} - 1\right) y(x) = \alpha.$$

a) Finden Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{G}(k)$ einer zugehörigen Greenschen Funktion. [10]

b) Finden Sie die rücktransformierte Greensche Funktion $G(x, x')$ mit Hilfe des Residuensatzes. [10]

c) Raten Sie eine homogene Greensche Funktion, z.B. anhand der Lösung aus (b), und überprüfen Sie, dass diese die homogene Differentialgleichung erfüllt. [10]

d) Lösen Sie die Differentialgleichung auf $x \in [1, 2]$ unter der Randbedingung $y'(2) = \beta$ mit konstantem β (welches unabhängig von α ist) mit Hilfe der Greenschen Funktionen. Vereinfachen Sie die Lösung $y(x)$ so weit wie möglich. [10]