2. Test - Lösungen **18.1.2013**

1 Separationsansatz

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x,y,z) = (x+z)\,\Phi(x,y,z)$
Ansatz: $\Phi(x,y,z) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)\Phi_3(z)$.
Ganze Gleichung durch $\Phi = \Phi_1\Phi_2\Phi_3$ dividieren:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + x\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + \frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_3\right] = x + z.$
Φ_3 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + x\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] - x = -\frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_3\right] + z = A(x,y) = A(z) = A = const.$
$\to \Phi_3''(z) = (z-A)\,\Phi_3(z)$.
Umformen, Φ_2 herausheben:
$\left\{\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right] + x\right\}\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] = A + x.$
$\frac{\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]+x}{A+x} = \frac{\Phi_2}{\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2} = B(x) = B(y) = B = const.$
$\to \frac{\partial}{\partial y}\Phi_2(y) = \frac{1}{B}\Phi_2(y)$.
$\to \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1(x) = [B\,(A+x) - x]\,\Phi_1(x)$.

1 Fuchssche Klasse

a) $xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0. \quad \to \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{-1}{x^2}y = 0 = y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y.$
$\to p_1(x) = \frac{1}{x}$, $p_2(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Singuläre Punkte: $x_0 = 0$:
$\alpha_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)p_1(x) = \lim_{x\to 0}(x-0)\frac{1}{x} = 1.$
$\beta_0 = \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 p_2(x) = \lim_{x\to 0}(x-0)^2\,\frac{-1}{x^2} = -1.$
Charakteristische Exponenten:
$\sigma\,(\sigma-1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0 = \sigma^2 - \sigma + \sigma - 1 = \sigma^2 - 1 = (\sigma-1)(\sigma+1) = 0.$
$\to \sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -1$.
b) Ansatz für generalisierte Potenzreihe: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^{n+\sigma}$.
$\to y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\,(n+\sigma)\,x^{n+\sigma-1}$,
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\,(n+\sigma)\,(n+\sigma-1)\,x^{n+\sigma-2}$.
Einsetzen liefert: $xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma-1} w_n\,[(n+\sigma)\,(n+\sigma-1) + (n+\sigma) - 1]$.
$\to w_n\,(n+\sigma+1)\,(n+\sigma-1) = 0$.
Da $n \in \mathbb{N}_0$ ist das nur erfüllt, falls entweder $w_n = 0$ oder $n = -1-\sigma$ oder $n = 1-\sigma$.
Mit $\sigma_1 = 1$: $w_n\,(n+2)\,n = 0 \to w_0 = C \neq 0$, $w_{n>0} = 0$.
Mit $\sigma_2 = -1$: $w_n n\,(n-2) = 0 \to w_0 = A \neq 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = B \neq 0$, $w_{n>2} = 0$.
$\to y_1(x) = \frac{C}{x}$, $y_2(x) = \frac{A}{x} + Bx$.
Lösung: $y(x) = \frac{A}{x} + Bx$.
Probe: $y'(x) = -\frac{A}{x^2} + B$, $y''(x) = 2\frac{A}{x^3}$.
$zy'' + y' - \frac{w}{x} = x\left(2\frac{A}{x^3}\right) + \left(-\frac{A}{x^2} + B\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{A}{x} + Bx\right) = 0.$

2 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x = -i\frac{d}{dx} - 1$, $f(x) = \alpha$, $\mathcal{L}_x y(x) = f(x)$.
Ansatz: $G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)e^{ik(x-x')}dk$
und $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk$ einsetzen in
$\mathcal{L}_x G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\left(-i\frac{d}{dx} - 1\right) G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(-i\frac{d}{dx} - 1\right) e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(k - 1\right) e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk$.
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\left(k-1\right) = 1. \quad \rightarrow \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k-1}$.
b)
$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k-1}dk$.
Pole liegt genau auf der reellen Achse. Um den Residuensatz anwenden zu können, wird der Pol leicht verschoben, z.B. nach oben: $k - k_1 = k - 1 - i\varepsilon$ mit $k_1 = 1 + i\varepsilon$. Der Pol liegt nun im oberen Bereich. Für $x - x' > 0$: Großkreis oben schließen ($ik = i(\mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k) = i\mathrm{Re}k - \mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k > 0$ exponentiell gedämpft).
Für $x - x' < 0$: Großkreis unten schließen: hier sind keine Pole mehr eingeschlossen.
$G(x,x') = H(x-x')2\pi i \mathrm{Res}_{k\to 1+i\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k-1-i\varepsilon} + H(x'-x)\times 0$
$= H(x-x')2\pi i \lim_{k\to 1+i\varepsilon}(k-1-i\varepsilon)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k-1-i\varepsilon}$
$= H(x-x')ie^{i(1+i\varepsilon)(x-x')} \overset{\varepsilon\to 0}{=} H(x-x')ie^{i(x-x')} =: G_I(x,x')$
c) Rate Homogene Greensche Funktion, z.B.: $G_H = ie^{i(x-x')}$.
Probe: $\left(-i\frac{d}{dx} - 1\right) ie^{i(x-x')} = -i^3 e^{-i(x-x')} - ie^{-i(x-x')} = 0$. Ok.
d) Beitrag der inhomogenen Greenschen Funktion für $1 < x < 2$:

$$y_I(x) = \int_1^2 G_I(x,x')f(x')dx' = \underbrace{\int_1^2 H(x-x')}_{\int_1^x} ie^{i(x-x')}\alpha dx'$$

$= \alpha i \left.\frac{e^{i(x-x')}}{-i}\right|_{x'=1}^{x}$
$= -\alpha e^0 + \alpha e^{i(x-1)}$
$= \alpha\left[e^{i(x-1)} - 1\right]$.
Das erfüllt die Randbedingung noch nicht:
$y'(x) = \alpha i e^{i(x-1)}$,
$y'(2) = \alpha i e^{i} \neq \beta$ (im Allgemeinen für α und β unabhängig).
Anpassen der Lösung mit Hilfe mit Hilfe einer beliebigen linear unabhängigen homogenen Lösung $y_H(x)$:
Wähle $y_H(x) = G_H(x,0)$:
$y(x) = y_I(x) + y_H(x)$
$\quad = \alpha\left[e^{i(x-1)} - 1\right] + AG_H(x,0)$
$\quad = \alpha\left[e^{i(x-1)} - 1\right] + Aie^{ix}$.
Anpassen an Randbedingungen:
$y'(x) = \alpha i e^{i(x-1)} - Ae^{ix}$,
$y'(2) = \alpha i e^{i} - Ae^{2i} \overset{!}{=} \beta$.
$A = -\frac{\beta - \alpha i e^{i}}{e^{2i}} = -\beta e^{-2i} + \alpha i e^{-i}$.
$\rightarrow y(x) = \alpha\left[e^{i(x-1)} - 1\right] + \left(-\beta e^{-2i} + \alpha i e^{-i}\right) ie^{ix}$
$\quad = \alpha e^{i(x-1)} - \alpha - \beta e^{-2i} ie^{ix} - \alpha e^{-i}e^{ix}$
$\quad = -\alpha - \beta i e^{i(x-2)}$.
Probe: $y'(x) = \beta e^{i(x-2)}$.
$y'(2) = \beta$.
$\mathcal{L}_x y(x) = \left(-i\frac{d}{dx} - 1\right) y(x) = -i\beta e^{i(x-2)} + \alpha + \beta i e^{i(x-2)} = \alpha$.