1. Tutorium **für 19.10.2012**

1.1 Projektoren

a) Gegeben sei ein Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$. Wie lautet der zugehörige Projektor $\mathbf{E_x}$?
b) Zeige, dass $\mathbf{E}_\mathbf{x}^2 = \mathbf{E_x}$.
c) Berechne $(\mathbf{E}_\mathbf{x}^2 + \mathbf{1})\mathbf{x}$.
d) Berechne $(\mathbf{1} + \mathbf{E_x})(\mathbf{1} - \mathbf{E_x})$.

1.2 Duale Basis

Gegeben sei folgende nicht-orthogonale Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ mit

$$\mathbf{f}_1 = (1, 0, 1)\,,\ \mathbf{f}_2 = (2, 1, 1)\,,\ \mathbf{f}_3 = (1, 2, 0)\,.$$

a) Stelle den Vektor $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ in der gegebenen Basis $\mathcal{B}$ dar (Standardbasis: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$).
b) Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*, \mathbf{f}_3^*\}$.
c) Stelle den Vektor $\mathbf{x}$ in der dualen Basis[1] dar und bestimme somit die Komponenten von $\mathbf{x}^*$ in der Basis $\mathcal{B}^*$.
d) Berechne die Länge von $\mathbf{x}$ mittels $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]}$ sowohl in der Standardbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ als auch in der Basis $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ und vergewissere Dich, dass in beiden Fällen die gleiche Länge herauskommt.

[1] Überprüfung des Zwischenergebnisses: $\mathrm{Tr}\mathcal{B}^* = -2$; $\mathbf{f}_3^* = (-1, \ldots)$.

1.3 Gegenseitig ergebnisoffene Basen

Gegeben sei die orthogonale Basis

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} = \left\{ (1,0,0)\,, \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Berechne mit Hilfe des Schwinger-Algorithmus eine dazu gegenseitig ergebnisoffene Basis (mutually unbiased basis).
a) Wie lautet die unitäre Basistransformation U?
b) Wie lauten die dazugehörigen Eigenvektoren[2] und die neue Basis $\mathcal{B}'$?
c) Überprüfe, ob die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ tatsächlich gegenseitig ergebnisoffen sind. Wieviele Kombinationen müssen geprüft werden?

Ankreuzbar: 1ab, 1cd, 2ab, 2cd, 3a, 3bc

[2] Zur Überprüfung des Ergebnisses kann man auch www.wolframalpha.com verwenden, z.B. durch Eingabe von etwas ähnlichem wie „eigenvectors ((1,0,0),(0,1/sqrt(2),0),(0,0,1))". Man sollte aber auch in der Lage sein, Eigenwerte und Eigenvektoren auf händischem Weg zu bestimmen.