1. Tutorium - Lösungen **19.10.2012**

1.1 Projektoren

a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{E_x} = \frac{\mathbf{x}\otimes\mathbf{x}^T}{\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle} = \frac{1}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} (\cos\varphi, \sin\varphi, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{E_x^2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\underbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 1\right)}_{2} \begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 1 \end{pmatrix}$.

c) $(\mathbf{E_x^2} + \mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{E_x x} + \mathbf{x} = 2\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 2 \end{pmatrix}$.

d) $(\mathbf{1} + \mathbf{E_x})(\mathbf{1} - \mathbf{E_x}) = \mathbf{1} - \mathbf{E_x^2} = \mathbf{1} - \mathbf{E_x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-\cos^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi & -\cos\varphi \\ -\cos\varphi\sin\varphi & 2-\sin^2\varphi & -\sin\varphi \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 Duale Basis

a) Wir suchen Koeffizienten x_1, x_2, x_3 mit $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 = x_1\mathbf{f}_1 + x_2\mathbf{f}_2 + x_3\mathbf{f}_3$. Das ist ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten.

In der Notation des Vorlesungsskriptums: $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Das System löst man am Einfachsten durch Berechnung der Inversen nach dem Gauß-Jordan-Algorithmus, da wir die Inverse sowieso für die duale Basis benötigen:

$$(\mathbf{B}|\mathbf{I}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 1 \\ -2I \\ -I \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \times 1 \\ -2II \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -III \\ +III \\ \times 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) = (\mathbf{I}|\mathbf{B}^{-1})$$

Also sind die Komponenten in der Basis $\mathcal{B}$ gegeben durch

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = \left(\mathbf{B}^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Die duale Basis kann man von den Spalten der obigen inversen Matrix $\mathbf{B}^{-1}$ ablesen:
$\mathbf{f}_1^* = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{f}_2^* = (2, -1, -2)$, $\mathbf{f}_3^* = (-1, 1, 1)$.

c) Von $\mathbf{x} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^* \\ \mathbf{f}_2^* \\ \mathbf{f}_3^* \end{pmatrix} = (4, 4, 2) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \mathbf{e}_2^* \\ \mathbf{e}_3^* \end{pmatrix}$ ausgehend liefert Multiplikation von rechts mit $\mathbf{B}^T$ die Komponenten des dualen Vektors $\mathbf{x}^* = (4, 4, 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (6, 14, 12)$.

d) Berechnung der Länge in der Standardbasis: $\|x\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$.
Berechnung in der Basis $\mathcal{B}$: $\|x\| = \sqrt{[\mathbf{x}, \mathbf{x}^*]} = \sqrt{2 \times 6 - 0 \times 14 + 2 \times 12} = \sqrt{36} = 6$.

1.3 Gegenseitig ergebnisoffene Basen

a) Permutation aller Elemente der Basis: $\mathcal{S} = \left\{ \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$.
Daraus und mit $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ wird die unitäre Basistransformation gebildet:

$$\mathsf{U} = \mathbf{f}_1^\dagger \mathbf{e}_1 + \mathbf{f}_2^\dagger \mathbf{e}_2 + \mathbf{f}_3^\dagger \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} (1,0,0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmung der Eigenwerte: $\det(\mathsf{U} - \lambda \mathsf{I}) = \det \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0$ führt auf $\lambda^3 = 1$ mit Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = (-1)^{\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = (-1)^{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Die dazugehörigen Eigenvektoren bestimmt man durch das Gaußsche Eliminationsverfahren, z.B. $(\mathsf{U} - \lambda_1 \mathsf{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$. Eigenvektoren: $\left(1, 0, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, i\sqrt{3}, 1\right), \left(-\sqrt{2}, -i\sqrt{3}, 1\right)$. Normierung der Vektoren ergibt die neue Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$.
c) Überprüfung der gegenseitigen Ergebnisoffenheit anhand von 9 Kombinationen:

$\mathbf{e}_1^\dagger \mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\left|\mathbf{e}_1^\dagger \mathbf{e}'_1\right|^2 = \frac{1}{3}$.

$\left|\mathbf{e}_1^\dagger \mathbf{e}'_2\right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right|^2 = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{3}$,

$\left|\mathbf{e}_1^\dagger \mathbf{e}'_3\right|^2 = \ldots = \frac{1}{3}$, $\left|\mathbf{e}_2^\dagger \mathbf{e}'_1\right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{3}$,

$\left|\mathbf{e}_2^\dagger \mathbf{e}'_2\right|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right|^2 = \left|\frac{i}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$,

analog: $\left|\mathbf{e}_2^\dagger \mathbf{e}'_3\right|^2 = \frac{1}{3}$, $\left|\mathbf{e}_3^\dagger \mathbf{e}'_1\right|^2 = \frac{1}{3}$, $\left|\mathbf{e}_3^\dagger \mathbf{e}'_2\right|^2 = \frac{1}{3}$, $\left|\mathbf{e}_3^\dagger \mathbf{e}'_3\right|^2 = \frac{1}{3}$.