2. Tutorium **für 09.11.2012**

2.1 Pauli-Matrizen

Berechne folgende Kommutatoren, und gib das Ergebnis mit Hilfe von Pauli-Matrizen an.
a) $[\sigma_1, \sigma_2]$
b) $[\sigma_1, \sigma_1\sigma_2]$
c) $[\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2]$

2.2 Spektraltheorem

a) Bestimme die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die zugehörigen Projektoren $\mathbf{E}_i$ und überprüfe, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.
c) Welche Matrix erhält man für $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_i$?
d) Gib Polynome $p_i(t)$ an, für die $p_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ gilt.
e) Überprüfe für eines der Polynome, dass $p_i(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_i$.

2.3 Funktionen von Matrizen

Funktionen von Matrizen lassen sich über deren Taylor-Reihe definieren, z.B. $\exp(\mathbf{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$. Zeige, dass für invertierbare quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt:
a) $e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{B}} \mathbf{A}$.
b) $\exp(i\alpha\sigma_i) = \mathbf{I}\cos(\alpha) + i\sigma_i \sin(\alpha)$, für die Pauli-Matrizen σ_i und reellem α. (Hinweis: Berechne zunächst $(\sigma_i)^2$, $(\sigma_i)^3$, ...)
c) $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} \exp(\lambda_i)\mathbf{E}_i$, wobei $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i$ nach dem Spektraltheorem.
d) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}}$ (Hinweis: „Diagonalisiere“ $\mathbf{A}$ über $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}$ und verwende die Produktregel für Determinanten bzw. die zyklische Vertauschung von Matrizen unter der Spur, um $\mathbf{S}$ „loszuwerden“).

Ankreuzbar: 1abc, 2ab, 2cde, 3ab, 3c, 3d