2. Tutorium - Lösungen **09.11.2012**

2.1 Pauli-Matrizen

a) $\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3.$

$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3.$

$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3 + i\sigma_3 = 2i\sigma_3.$

b) $[\sigma_1, \sigma_1\sigma_2] = [\sigma_1, i\sigma_3] = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = 2\sigma_2.$

c) $[\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2] = \underbrace{[\sigma_1, \sigma_1]}_{0} - \underbrace{[\sigma_2, \sigma_1]}_{-2i\sigma_3} + \underbrace{[\sigma_1, \sigma_2]}_{2i\sigma_3} - \underbrace{[\sigma_2, \sigma_2]}_{0} = 4i\sigma_3.$

2.2 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ führt zu $-\lambda^2(1+\lambda) + \lambda + \lambda - 2 - 2 + 4(1+\lambda) = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda\left(\lambda^2 + \lambda + 6\right) = 0.$

Eigenwerte: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{-1\pm 5}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3.$

Zugehörige Eigenvektoren: für $\lambda_3 = 0$:

$(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})\,\mathrm{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$ Lösen des Gleichungssystems mit 3 Variablen liefert (nach einiger Rechnung) z.B. $x_1 - x_3 = 0$, $x_2 - 2x_3 = 0$, was z.B. durch den Vektor $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ erfüllt wird.

Analog findet man für $\lambda_1 = 2$:

$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\,\mathrm{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\mathrm{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{x}_1 = 0, \text{also}\ \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Und für $\lambda_2 = -3$ folgt $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normierte Eigenvektoren: $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Projektoren:

$\mathbf{E}_1 = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}(1, 0, -1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{E}_2 = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(1, -1, 1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{E}_3 = \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_3^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 2, 1) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Spektrale Form:

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i = 2\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix} - 3\times\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} + 0\times\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&1&-2\\1&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

c) Man erhält die Identitätsmatrix:

$$\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\mathbf{E}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

d) $p_i(t) = \prod_{1\le j\le k,\, j\ne i}\frac{t-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}$.

$p_1(t) = \frac{t-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\frac{t-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3} = \frac{t+3}{2+3}\frac{t+0}{2+0} = \frac{1}{10}t\,(t+3)\,,$

$p_2(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\frac{t-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} = \frac{t-2}{-3-2}\frac{t-0}{-3-0} = \frac{1}{15}t\,(t-2)\,,$

$p_3(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1}\frac{t-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2} = \frac{t-2}{0-2}\frac{t+3}{0+3} = -\frac{1}{6}\,(t-2)\,(t+3)\,.$

e) z.B.

$$p_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{10}\mathbf{A}\,(\mathbf{A}+3\mathbf{I}) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0&1&-2\\1&-1&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&2&1\\-2&1&3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}5&0&-5\\0&0&0\\-5&0&5\end{pmatrix} = \mathbf{E}_1.$$

2.3 Funktionen von Matrizen

a) $e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}} = \mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}\right)^3+\dots$

$$= \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{IA}} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{BA}+\frac{1}{3!}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{AA}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{BA}+\dots$$

$= \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I}+\mathbf{B}+\frac{1}{2}\mathbf{BB}+\frac{1}{3!}\mathbf{BBB}+\dots\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A},$

oder

$e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{A}}{n!} = \mathbf{A}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}.$

b) $\exp(i\alpha\sigma_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= \mathbf{I}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}+i\sigma_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbf{I}\cos(\alpha)+i\sigma_i\sin(\alpha),$

mit $(\sigma_i)^2 = \sigma_i\sigma_i = \mathbf{I}$, $(\sigma_i)^3 = \sigma_i$, etc.

c) $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i\right)^n \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^n\underbrace{\mathbf{E}_i^n}_{\mathbf{E}_i}\right)$

$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda_i^n\mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^{k}\exp(\lambda_i)\,\mathbf{E}_i.$ ((*) Das gilt, da $E_iE_j = 0$ für $i\ne j$.)

d) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = \det\left(e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}}\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}_D}\mathbf{S}\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}\right)\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)\det\left(\mathbf{S}\right) = \det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)$. Per Konstruktion sind nur Diagonalelemente von $\mathbf{A}_D$ besetzt: $\mathbf{A}_D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$.

$$e^{\mathbf{A}_D} = \mathbf{1}+\mathbf{A}_D+\frac{1}{2}\mathbf{A}_D^2+\dots = \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&\lambda_n\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^2&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&\lambda_n^2\end{pmatrix}+\dots$$

$$= \begin{pmatrix}1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\dots&0&\cdots&0\\0&1+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\dots&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&1+\lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\dots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

$$\to\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right) = \det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}.$$

Das stimmt mit der rechten Seite überein: $e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}} = e^{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}\right)} = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}_D} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$.