3. Tutorium **für 16.11.2012**

3.1 Tensoren

a) Die Komponenten eines kovarianten Tensors zweiter Stufe A bezüglich der dualen Basis zur Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ lauten $A_{11} = 1$, $A_{12} = 1$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = 3$. Wie lauten die Komponenten bezüglich der dualen Basis zu einer um den Winkel φ gedrehten Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$?

(Hinweis: Wenn die Basisvektoren wie $\mathbf{e}'_i = a_i{}^j \mathbf{e}_j$ transformieren, so transformiert der kovariante Tensor zweiter Stufe wie $A'_{jk} = a_j{}^l a_k{}^m A_{lm}$, wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde).

b) Wie schaut der metrische Tensor g'_{ij} der gedrehten Basis aus? Berechne außerdem g'^{ij} über $g'^{ij} g'_{jk} = \delta^i{}_k$.

c) Berechne die Komponenten des zugehörigen kontravarianten Tensors mit Hilfe des metrischen Tensors, also $A'^{ij} = g'^{ik} g'^{jl} A'_{kl}$.

Nicht-orthogonale Basis

d) Wie lauten die Komponenten des Tensors A bezüglich der dualen Basis zur nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

e) Berechne g'' und die Komponenten des kontravarianten Tensors A''^{ij}.

f) Berechne explizit:
$g^{ij} A_{ji}$ und $g''^{ij} A''_{ji}$;
$A^{ij} A_{ji}$ und $A''^{ij} A''_{ji}$;
$A^{ij} A_{ij}$ und $A''^{ij} A''_{ij}$.
Was fällt auf (wenn man richtig gerechnet hat)?

g) Welches Ergebnis muss für die folgenden Ausdrücke herauskommen (ohne die Rechnung explizit in $\mathcal{B}''$ durchführen zu müssen)?
$s = g''^{ij} A''_{jk} g''^{km} \left(A''_{mi} - A''_{im}\right)$.
$t = A''^i{}_j A''_k{}^l \left(\delta^j_l \delta^k_i - \delta^j_i \delta^k_l + g''^{jk} g''_{il}\right)$.

3.2 Levi-Civita Symbol

a) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention!).

b) Zeige, dass für reelle oder komplexe Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ in einer dreidimensionalen, orthonormalen Basis mit euklidischer Metrik[1] gilt:
$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ und $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.
(Hinweis: Zeige zunächst unter Verwendung der Indexschreibweise, dass
$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$ gilt.)

3.3 Differentialoperatoren

Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik):
a) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}$.
b) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$.
c) $\nabla \cdot \mathbf{x}$.
d) ∇r mit $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Ankreuzbar: 1abc, 1de, 1fg, 2a, 2b, 3abcd

[1] Für eine euklidische Metrik mit orthonormalen Basen braucht nicht zwischen unteren und oberen Indizes unterschieden zu werden (man kann es aber natürlich weiterhin tun).