

4. Tutorium

für 23.11.2012

4.1 Differentialoperatoren

Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik):

a) $\text{rot grad } \varphi$.b) $\mathbf{A} [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})]$.c) Stelle $\mathbf{v} (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ als Divergenz eines Tensors zweiter Stufe dar.d) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{r^5} \right)$ mit $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.e) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^5} \right)$ mit \mathbf{p} konstant und $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

4.2 Tensorfelder

Welche der folgenden Tensorfelder sind bezüglich Rotationen um den Ursprung forminvariant (für eine zweidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik)?

a) $Q(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

b) $S(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_1^2 + x_2^2 \\ -x_1^2 - x_2^2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.3 Distributionen

a) Berechne

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax + b) \varphi(x) dx$$

für $a > 0$ durch geeignete Variablensubstitution von x . Welche Bedingungen muss die Testfunktion φ erfüllen?

b) Berechne das gleiche für $a < 0$ durch Variablensubstitution.

c) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 4) e^x dx.$$

4.4 Delta-Folgen

Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, welche der folgenden Folgen $\{f_n\}$ Deltafolgen für $n \rightarrow \infty$ bzw. $\varepsilon \rightarrow 0$ sind:

a)

$$f_n(x) = \sqrt{n}e^{-n\pi x^2}.$$

b)

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } -\frac{\varepsilon^2}{2} < x < \frac{\varepsilon^2}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 1de, 2ab, 3abc, 4ab