4. Tutorium - Lösungen **23.11.2012**

4.1 Differentialoperatoren

a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \to \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{\partial_j\partial_k}_{\text{symmetrisch}} \varphi = 0.$

Explizit: $\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{ikj}} \partial_j\partial_k\varphi = -\varepsilon_{ikj} \underbrace{\partial_j\partial_k\varphi}_{\substack{=\partial_k\partial_j\varphi \\ \text{(Satz von Schwarz)}}} = -\underbrace{\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j}_{=\varepsilon_{imn}\partial_m\partial_n}\varphi = -\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi \quad \Rightarrow 2\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k = 0.$

b) $\mathbf{A}\cdot[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})] \to A_i\left[\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\right) - \partial_i\left(\partial_j A_j\right)\right] = A_i\Big[\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}} \partial_j\partial_l A_m - \partial_i\partial_j A_j\Big]$

$= A_i\Big[\underbrace{\partial_j\partial_i A_j}_{\partial_i\partial_j A_j} - \partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j\Big] = -A_i\left(\partial_j\partial_j A_i\right) \to -\mathbf{A}\left(\Delta\mathbf{A}\right).$

c) $\mathbf{v}\left(\nabla\cdot\mathbf{v}\right) - \mathbf{v}\times\left(\nabla\times\mathbf{v}\right) \to v_i\left(\partial_j v_j\right) - \underbrace{\varepsilon_{ijk}v_j\left(\varepsilon_{klm}\partial_l v_m\right)}_{(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})v_j\partial_l v_m} = v_i\partial_j v_j - v_j\partial_i v_j + v_j\partial_j v_i$

$= \underbrace{v_i\partial_j v_j + v_j\partial_j v_i}_{\partial_j(v_i v_j)} - \underbrace{v_j\partial_i v_j}_{\frac{1}{2}\partial_i(v_k v_k)} = \partial_j\left[v_i v_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ji}v_k v_k\right].$

d) $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^5}\right) \to \partial_i\left(\frac{x_i}{r^5}\right) = \frac{1}{r^5}\big(\underbrace{\partial_i x_i}_{\delta_{ii}=3}\big) + x_i\left(\partial_i\frac{1}{r^5}\right) = \frac{1}{r^5}3 - x_i 5\frac{1}{r^6}\left(\partial_i r\right) = \frac{3}{r^5} - x_i\frac{5}{r^6}\frac{x_i}{r} = -\frac{2}{r^5}$ (mit $x_i x_i = r^2$).

e) $\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}\right) \to \partial_i\left(\frac{p_j x_j}{r^5}\right) = p_j\frac{1}{r^5}\big(\underbrace{\partial_i x_j}_{\delta_{ij}}\big) + p_j x_j\big(\underbrace{\partial_i\frac{1}{r^5}}_{-\frac{5}{r^6}\partial_i r}\big) = p_j\frac{1}{r^5}\delta_{ij} - p_j x_j\frac{5}{r^6}\frac{x_i}{r} = \frac{p_i}{r^5} - \frac{5x_i p_j x_j}{r^7} \to \frac{\mathbf{p}}{r^5} - \frac{5\mathbf{x}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}{r^7}.$

4.2 Tensorfelder

a) Anmerkung zur Notation: Transformation eines Tensorfeldes $Q(\mathbf{x}) \to Q'(\mathbf{x}')$ besteht aus „äußerer“ Transformation $\tilde{Q}(\mathbf{x}) = aQ(\mathbf{x})a^T$ und anschließender „innerer“ Transformation $Q'(\mathbf{x}') = \tilde{Q}(\mathbf{x}(\mathbf{x}'))$ mit $\mathbf{x}(\mathbf{x}') = a^{-1}\mathbf{x}'$. Forminvariant ist ein Tensor, wenn die Form $Q'(\mathbf{x}')$ mit der Form von $Q(\mathbf{x})$ übereinstimmt. Um die Form zu vergleichen, ersetzt man $\mathbf{x}'$ durch $\mathbf{x}$, also „forminvariant“$\Leftrightarrow Q'(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})$. Alternativ kann man aber auch $\mathbf{x}'$ einsetzen: $Q'(\mathbf{x}') = Q(\mathbf{x}') \to Q'(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) = Q(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))\to \tilde{Q}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) \Leftrightarrow$„forminvariant“.

$Q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}.$

„Äußere“ Transformation: $\tilde{Q}_{ij}(x_n) = a_{ik}a_{jl}Q_{kl}(x_n) \to \tilde{Q}(\mathbf{x}) = a\cdot Q(\mathbf{x})\cdot a^T$ mit $a = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$

$\tilde{Q}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^2 & 0 \\ 0 & x_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi x_1^2 & \sin\varphi x_2^2 \\ -\sin\varphi x_1^2 & \cos\varphi x_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c^2x_1^2 + s^2x_2^2 & -csx_1^2 + csx_2^2 \\ -csx_1^2 + csx_2^2 & s^2x_1^2 + c^2x_2^2 \end{pmatrix}$

$(c \equiv \cos\varphi,\ s \equiv \sin\varphi)$

„Innere“ Transformation: $x_i' = a_{ij}x_j$, demnach $x_i = \left(a^{-1}\right)_{ij} x_j'$.

$Q_{ij}'(x_n') = \tilde{Q}_{ij}(x_m(x_n')) = \tilde{Q}_{ij}\left(\left(a^{-1}\right)_{mn} x_n'\right).$

Zur „Überprüfung“ kann man aber einfach $x_i' = a_{ij}x_j$ in die ursprüngliche Form einsetzen.

$Q'(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) = \tilde{Q}(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} Q(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} x_1'^2 & 0 \\ 0 & x_2'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\varphi x_1 + \sin\varphi x_2)^2 & 0 \\ 0 & (-\sin\varphi x_1 + \cos\varphi x_2)^2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c^2x_1^2 + 2csx_1x_2 + s^2x_1^2 & 0 \\ 0 & c^2x_1^2 - 2csx_1x_2 + s^2x_1^2 \end{pmatrix} = Q(\mathbf{x}'(\mathbf{x})).$

Nachdem $Q'(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$ nicht mit $Q(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$ übereinstimmt, ist dieser Tensor nicht forminvariant.
b) $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & x_1^2 + x_2^2 \\ -x_1^2 - x_2^2 & 0 \end{pmatrix}$.
„Äußere“ Transformation:
$\tilde{S}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_1^2 + x_2^2 \\ -x_1^2 - x_2^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$
$= \left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} -s & c \\ -c & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} 0 & c^2 + s^2 \\ -c^2 - s^2 & 0 \end{pmatrix} = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
„Innere“ Transformation:
$S'(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) = \tilde{S}(\mathbf{x}) \stackrel{?}{=} S(\mathbf{x}'(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 0 & x'^2_1 + x'^2_2 \\ -x'^2_1 - x'^2_2 & 0 \end{pmatrix} = \left(x_1^2 + x_2^2\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = S(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$.
Da $S'(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$ und $S(\mathbf{x}'(\mathbf{x}))$ übereinstimmen, ist dieser Tensor forminvariant.

4.3 Distributionen

a) $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax+b)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = \frac{1}{a}\varphi(-\frac{b}{a})$.
Variablensubstitution $ax + b = y$, $a\,dx = dy$, $dx = \frac{1}{a}dy$. Integrationsgrenzen bleiben für $a > 0$ gleich: $-\infty$ bis $+\infty$.
Testfunktion φ: Im Allgemeinen muss eine Testfunktion einen kompakten Träger haben (daher insbesondere im Unendlichen verschwinden) und beliebig oft differenzierbar sein.
b) Für $a < 0$ ändern sich Integrationsgrenzen:
$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax+b)\varphi(x)dx = \int_{+\infty}^{-\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = -\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy = -\frac{1}{a}\varphi(-\frac{b}{a})$.
c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x^2-4\right)e^x dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{|4|}\delta\left(x-2\right) + \frac{1}{|-4|}\delta\left(x+2\right)\right] e^x dx = \frac{1}{4}\left(e^2 + e^{-2}\right)$.
Dabei wurde $f(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ und $f'(x) = 2x$ verwendet.

4.4 Delta-Folgen

a) Ja. Folge auf Testfunktion anwenden:
$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{n}e^{-n\pi x^2}\varphi(x)dx = \left| \begin{array}{c} u = \sqrt{n\pi}x \\ du = \sqrt{n\pi}dx \end{array} \right|$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\varphi(\frac{u}{\sqrt{n\pi}})du \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\varphi(0)du = \varphi(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du = \varphi(0)$.
b) Nein: $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon^2/2}^{\varepsilon^2/2} \frac{1}{\varepsilon}\varphi(x)dx$
$\to \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\varepsilon^2/2}^{\varepsilon^2/2} \frac{1}{\varepsilon}\varphi(0)dx = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \varphi(0) \times 0$.