5. Tutorium **für 30.11.2012**

5.1 Distributionen

Vereinfache bzw. berechne:
a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(2y^2 + 4x - 30)\delta(x + y) f(x, y)$.
b) $J = \int_{3/2}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(2 - s + t)\delta(st - 3) \cos(s + t)$.

5.2 Indexschreibweise

a) Vereinfache $\text{rot}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{x})$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor und $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld ist (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).
b) Berechne $g^{ij} B_{ij}$, $B^{ij} B_{ij}$ und $B^{ij} B^{mn} (g_{im} g_{jn} - g_{in} g_{jm})$ mit $B_{ij} = A_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} A^k{}_k$ für eine nicht-orthogonale, dreidimensionale Metrik.

5.3 Maxwell-Gleichungen

a) Schreibe die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraftdichte (in CGS Einheiten und mit $c = 1$) in Indexschreibweise:
$\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}, \qquad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B},$
$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$.
b) Berechne aus der dritten Gleichung die Divergenz des Stromes $\mathbf{j}$ in Indexschreibweise und zeige, dass dies auf die Kontinuitätsgleichung führt.
c) Zeige in Indexschreibweise, dass $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ die zweite und die vierte Maxwellgleichung lösen.

5.4 Transformation von Differentialoperatoren

Polarkoordinaten $x'^1 = r$, $x'^2 = \varphi$ sind definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = x^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x^1(r, \varphi) \\ x^2(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Berechne die lokale, infinitesimale[1] Transformationsmatrix $a_i{}^j$ von kartesischen Koordinaten in die Polarkoordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen

[1] Obwohl zwischen $x^i = (x, y)^T$ und $x'^i = (r, \varphi)^T$ global kein linearer Zusammenhang besteht, kann man lokal (ortsabhängig) und infinitesimal (also für die Richtungen) einen linearen Zusammenhang angeben: $dx^j(\mathbf{x}) = a_i{}^j(\mathbf{x}) dx'^i(\mathbf{x})$.

(nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$.
b) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal?
c) Berechne die inverse Transformationsmatrix ${a'}_i^{\ j}$, und stelle mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i = (0,1)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dar.
d) Skizziere die drei Koordinatenlinien $r = 1$, $r = 2$, sowie $\varphi = 1$ graphisch. Zeichne für folgende Punkte die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ein: $(r,\varphi)^T = (1,0)^T$, $(1,1)^T$ und $(2,1)^T$. Zeichne den Vektor $\mathbf{v}$ an diesen Punkten ein, und prüfe, ob die Zerlegung in die Basis $\mathcal{B}'$ für diese Punkte stimmt.
e) Berechne den Gradient in Polarkoordinaten[2].
Hinweis: Der Gradient soll sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten den gleichen Vektor ergeben:

$$\begin{aligned}\nabla\phi(x,y) &= (\partial_x \phi(x,y))\,\mathbf{e}^x + (\partial_y \phi(x,y))\,\mathbf{e}^y \\ &= (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^r + (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^\varphi.\end{aligned}$$

Um von der ersten zur zweiten Zeile zu gelangen, kann einerseits die alte durch die neue Basis ausgedrückt werden ($\mathbf{e}^x = ...\mathbf{e}^r + ...\mathbf{e}^\varphi$), und andererseits die verallgemeinerte Kettenregel angewendet werden ($\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$).

Nicht-orthogonale Parabelkoordinaten

Eine Koordinatentransformation von (x,y) nach (r,φ) sei durch folgende Parametrisierung gegeben, die Parabeln beschreibt:

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \\ r\varphi \end{pmatrix}.$$

(Für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ ist das eine Näherung an die Polarkoordinaten mit Fehler $O(\varphi^3)$.)
f) g) h) i) j) Führe die Punkte a)-e) für die gegebenen nicht-orthogonalen Koordinaten durch[3].

Ankreuzbar: 1ab, 2ab, 3abc, 4abcd, 4e, 4fghij

[2] Beachte beim Vergleich des Endergebnisses mit der Literatur, dass dort meist normierte (d.h. Einheits-)Basisvektoren verwendet werden, z.B. auf http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Gradient .

[3] Zwischenergebnis zur Überprüfung: Die invertierte Transformationsmatrix lautet $a^{-1} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}$.