6. Tutorium **für 14.12.2012**

6.1 Verallgemeinerten Funktionen

a) Berechne die n-te Derivierte der verallgemeinerten Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

b) Vereinfache folgendes Funktional

$$\left(\frac{d}{dx} - \omega\right)\left[H(x)e^{\omega x} + H(-x)e^{-\omega x}\right].$$

6.2 Residuensatz

a) Berechne alle Lösungen von $x^n + 1 = 0$ über die Formel von de Moivre. Wie sehen die Lösungen für $n = 4$ aus?
b) Sei $f(x) = g(x)/h(x)$, wobei g und h analytisch um einen Punkt c seien, und h eine einfache Nullstelle am Punkt c hat. Zeige, dass dann das Residuum an der Stelle c berechnet werden kann durch

$$\mathrm{Res}_{x\to c} f(x) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

(Hinweis: Nähere $h(x)$ in der Umgebung von c an durch $h(x) \approx (x-c)h'(c)$).
c) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^4 + 1} dx$$

über den Residuensatz.

6.3 Greensche Funktion

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y(t) = e^t.$$

a) Finde eine zugehörige Greensche Funktion mit Hilfe des Residuensatzes.

b) Löse die Differentialgleichung auf $t \in [0, \infty)$ unter der Randbedingung $y(0) = 0$ mit Hilfe der Greensfunktionen.
c) Überprüfe durch Einsetzen, dass die Lösung die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

6.4 Separationsansatz

Separiere folgende Differentialgleichung, die die Schrödingergleichung enthält,

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,y,z,t) = V_0\Psi(x,y,z,t)$$

im kartesischen Koordinatensystem.

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2ab, 2c, 3abc, 4