6. Tutorium - Lösungen **14.12.2012**

6.1 Verallgemeinerten Funktionen

a) $f(x) = \cos(x)H(\pi + x)H(\pi - x)$.
$f'(x) = -\sin(x)H(\pi + x)H(\pi - x) + \cos(x)\delta(\pi + x)H(\pi - x) - \cos(x)H(\pi + x)\delta(\pi - x)$
$= -\sin(x)H(\pi + x)H(\pi - x) - \delta(\pi + x) + \delta(\pi - x)$.
$f''(x) = -\cos(x)H(\pi + x)H(\pi - x) - 0 - 0 - \underbrace{\delta'(\pi + x)}_{=\delta'(x+\pi)} + \underbrace{\delta'(\pi - x)}_{=-\delta'(x-\pi)}(-1)$
$= -\cos(x)H(\pi + x)H(\pi - x) - \delta'(x + \pi) + \delta'(x - \pi)$
$= -f(x) + \delta'(x - \pi) - \delta'(x + \pi)$.
$f'''(x) = -f'(x) + \delta''(x - \pi) - \delta''(x + \pi)$.
$n \geq 2 : f^{(n)}(x) = -f^{(n-2)} + \delta^{(n-1)}(x - \pi) - \delta^{(n-1)}(x + \pi)$.
b)$\left(\frac{d}{dx} - \omega\right) [H(x)e^{\omega x} + H(-x)e^{-\omega x}]$
$= \delta(x)e^{\omega x} + H(x)\omega e^{\omega x} + \delta(-x)(-1)e^{-\omega x} + H(-x)(-\omega)e^{-\omega x} - \omega H(x)e^{\omega x} - \omega H(-x)e^{-\omega x}$
$= \delta(x) + H(x)\omega e^{\omega x} - \delta(x) - H(-x)\omega e^{-\omega x} - \omega H(x)e^{\omega x} - \omega H(-x)e^{-\omega x}$
$= -2H(-x)\omega e^{-\omega x}$
$= -2\omega e^{-\omega x} [1 - H(x)]$.

6.2 Residuensatz

a) Lösungen von $x^n + 1 = 0$, also $x^n = -1$: Satz von de Moivre: $e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$. Rechte Seite ergibt -1 für $n\varphi = \pi(2N + 1)$ mit ganzzahligem N. Daher $\varphi = \frac{\pi}{n}(2N + 1)$ mit $N = 0, 1, \ldots, n - 1$.
Für $n = 4$ hat man $x_1 = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2 = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $x_3 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $x_4 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
b) Da $h(x)$ eine einfache Nullstelle bei $x = c$ hat, gilt $h(x) \approx (x - c)h'(c)$ in einer Umgebung von $x = c$. Daher:
$\mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}f(x) = \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{h(x)} \approx \mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)} = \lim_{x\to c}(x - c)\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)}$
$= \lim_{x\to c}\frac{g(x)}{h'(c)} = \frac{g(c)}{h'(c)}$.
Wem das „$\approx$“ zu ungenau ist, der kann $h(x)$ auch in einer Taylor-Reihe $h(x) = 0+(x - c)\,h'(c)+\frac{1}{2!}\,(x - c)^2\,h''(c)+ \ldots$ expandieren und dann die Laurentreihe des Quotienten bilden. Der Koeffizient $a_{-1} = g(c)/h'(c)$ der Laurentreihe $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x - c)^n$ ist dann genau das gesuchte Residuum.
c) Die Pole befinden sich bei $e^{\pm i\pi/4}$ und $e^{\pm 3i\pi/4}$. Man kann die oberen zwei Pole wählen, und den Integrationsweg über den oberen Halbkreis schließen, der keinen Beitrag liefert. Die Residuen an den Polen der oberen Halbebene sind
$\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{i\pi/4}} = \frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4e^{3i\pi/4}}$.
$\mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{3i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{i\pi/4}}$.
Schließen im oberen Halbkreis (positiver Umlaufsinn, daher kein zusätzliches „-“) ergibt:
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+bx+c}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1} + \mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}}\frac{x^2+ax+b}{x^4+1}\right)$
$= 2\pi i\left(\frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4}e^{-3i\pi/4} + \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4}e^{-i\pi/4}\right)$
$= \frac{\pi i}{2}\left[i\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + a\,(-i + i) + b\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,(1 + b)$.

6.3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_t = \frac{d}{dt} + 1$, $f(t) = e^t$, $\mathcal{L}_t y(t) = f(t)$.
Ansatz: $G(t, t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)e^{ik(t-t')}dk$
und $\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(t-t')}dk$ einsetzen in

$\mathcal{L}_t G(t,t') = \delta(t-t')$,
$\left(\frac{d}{dt}+1\right) G(t,t') = \delta(t-t')$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(\frac{d}{dt}+1\right) e^{ik(t-t')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-t')}dk$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\,(ik+1)\, e^{ik(t-t')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-t')}dk$.
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\,(ik+1) = 1. \quad \to \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{ik+1}$.
(Etwas ausführlicher: Fourier-Transformation $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-ik'(t-t')}$ auf beiden Seiten angewandt:

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-ik'(t-t')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{G}(k)\,(ik+1)\, e^{ik(t-t')} = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-ik'(t-t')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(t-t')}.$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{G}(k)\,(ik+1)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(k-k')(t-t')}}_{2\pi\delta(k-k')} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(k-k')(t-t')}}_{2\pi\delta(k-k')}.$$

$$\to \tilde{G}(k')\,(ik'+1) = 1.)$$

$G(t,t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(t-t')}}{ik+1}dk$.
Pol liegt bei $k=+i$ im oberen Bereich. Für $t-t'>0$: Großkreis oben schließen ($ik = i(\mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k) = i\mathrm{Re}k - \mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k > 0$ exponentiell gedämpft). Für $t-t'<0$: Großkreis unten schließen: Kein Pol eingeschlossen.
$G(t,t') = H(t-t')2\pi i \mathrm{Res}_{k\to i}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(t-t')}}{ik+1} = H(t-t')2\pi i \lim_{k\to i}(k-i)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(t-t')}}{i(k-i)} = H(t-t')e^{-(t-t')}$.
b) Randbedingung: $y(0)=0 \quad \to \quad G(0,t') = H(-t')e^{t'} = 0$ für $t'>0$. Ok.
Lösung: $y(t) = \int_0^\infty G(t,t')f(t')dt' = \int_0^\infty H(t-t')e^{-(t-t')}e^{t'}dt' = \int_0^t e^{-t}e^{2t'}dt' = e^{-t}\frac{e^{2t}-1}{2} = \frac{e^t-e^{-t}}{2} = \sinh t$.
c) Probe: $\left(\frac{d}{dt}+1\right)\sinh t = \cosh t + \sinh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2} + \frac{e^t-e^{-t}}{2} = e^t$.
$y(0) = \sinh 0 = 0$.

6.4 Separationsansatz

$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = \left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi = V_0\Psi$.
Ansatz: $\Psi(x,y,z,t) = \Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)\Psi_4(t)$.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1(x)\right]\Psi_2(y)\Psi_3(z)\Psi_4(t) + \Psi_1(x)\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi_2(y)\right]\Psi_3(z)\Psi_4(t) + \Psi_1(x)\Psi_2(y)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_3(z)\right]\Psi_4(t)$$
$$+\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)\left[\frac{2mi}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_4(t)\right] = \frac{2mV_0}{\hbar^2}\Psi_1(x)\Psi_2(y)\Psi_3(z)\Psi_4(t).$$

Ganze Gleichung durch $\Psi = \Psi_1\Psi_2\Psi_3\Psi_4$ dividieren:
$\frac{1}{\Psi_1(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1(x)\right] + \frac{1}{\Psi_2(y)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi_2(y)\right] + \frac{1}{\Psi_3(z)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_3(z)\right] + \frac{1}{\Psi_4(t)}\left[\frac{2mi}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_4(t)\right] = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.
Nun der Reihe nach die Terme abspalten:
$\frac{1}{\Psi_1(x)}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_1(x)\right] + \frac{1}{\Psi_2(y)}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi_2(y)\right] + \frac{1}{\Psi_3(z)}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Psi_3(z)\right] = -\frac{1}{\Psi_4(t)}\left[\frac{2mi}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_4(t)\right] + \frac{2mV_0}{\hbar^2} = A(x,y,z) = A(t) = A = const.$
$\to -\frac{2mi}{\hbar}\Psi_4'(t) = \left(A - \frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)\Psi_4(t)$.
$\frac{1}{\Psi_1}\Psi_1'' + \frac{1}{\Psi_2}\Psi_2'' = -\frac{1}{\Psi_3}\Psi_3'' + A = B(x,y) = B(z) = B = const.$
$\to \Psi_3''(z) = (A-B)\,\Psi_3(z)$.
$\frac{1}{\Psi_1}\Psi_1'' = -\frac{1}{\Psi_2}\Psi_2'' + B = C(x) = C(y) = C = const.$
$\to \Psi_2''(y) = (B-C)\,\Psi_2(y)$.
$\to \Psi_1''(x) = C\Psi_1(x)$.
Alternativer Lösungsweg:

$$\underbrace{\frac{\Psi_1''(x)}{\Psi_1(x)}}_{\alpha(x)=\alpha=const} + \underbrace{\frac{\Psi_2''(y)}{\Psi_2(y)}}_{\beta(y)=\beta=const} + \underbrace{\frac{\Psi_3''(z)}{\Psi_3(z)}}_{\gamma(z)=\gamma=const} + \underbrace{\frac{2mi}{\hbar}\frac{\Psi_4'(t)}{\Psi_4(t)}}_{\delta(t)=\delta=const} = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = \Lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = const.$$

Da die rechte Seite eine Konstante ist, muss auch die linke Seite konstant sein, und da jeder der vier Terme von einer anderen Variable abhängt, muss jeder der vier Terme konstant sein.
$\to \Psi_1''(x) = \alpha\Psi_1(x), \quad \Psi_2''(y) = \beta\Psi_2(y), \quad \Psi_3''(z) = \gamma\Psi_3(z), \quad \frac{2mi}{\hbar}\Psi_4'(t) = \delta\Psi_4(t)$,
mit der Zusatzbedingung $\alpha+\beta+\gamma-\delta = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.
Das entspricht der ersten Lösung mit $\alpha = C$, $\beta = B-C$, $\gamma = A-B$, $\delta = -A + \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.