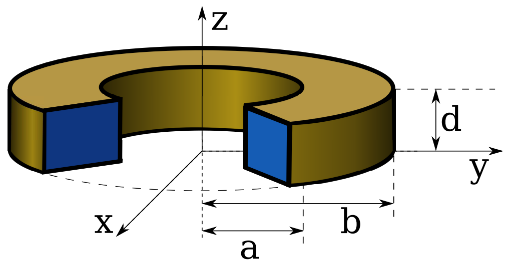
7. Tutorium „Apokalypse“ **für 21.12.2012**



Nebenstehender rätselhafter Gegenstand wurde bei Ausgrabungen nahe der alten Maya-Stadt in Tortuguero, Mexiko entdeckt. Archäologen haben sich an Physiker in Wien gewandt, um dessen Funktionsweise zu klären und damit den drohenden Weltuntergang am 21.12.2012 möglicherweise abzuwenden. Der hohle Ring besteht aus einem leitenden Mantel, der das Potential an der Oberfläche verschwinden lässt. Nur auf den blauen Flächen sind komplizierte Ladungsanordnungen möglich. Der Physiker erkennt die Symmetrie des Beispiels, und weiss, dass er nur mit der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten an des Rätsels Lösung gelangen kann.

7.1 Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

a) Transformiere den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten. Verwende hierfür den für beliebige Metriken gültigen Ausdruck

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\Phi\right),$$

mit $|g| := \det[g_{ij}]$.
b) Führe den Separationsansatz für die homogene Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten durch.

Der Separationsansatz führt auf drei Differentialgleichungen. Eine davon kann z.B. mit Hilfe der Greenschen Funktion gelöst werden. Damit es nicht zu leicht wird, löst der Physiker das allgemeinere Problem mit $\alpha \neq 0$:

7.2 Greensche Funktion

Folgende Differentialgleichung sei gegeben:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) y(x) = \alpha x.$$

(Die linke Seite ist die DGL in z-Richtung aus Beispiel 7.1b mit $z \to x$, $\Phi(z) \to y(x)$, und $A = -\lambda$ ist ein Parameter aus dem Separationsansatz.)

a) Berechne eine zugehörige Greensche Funktion. (Hinweis: Falls die Pole auf der reellen Achse liegen, können sie durch $\pm i\epsilon$ etwas von der reellen Achse weggeschoben werden. Die solcher Art erhaltenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine homogene Greensche Funktion.)
b) Löse die Differentialgleichung auf $x \in [0, d]$ unter den Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$ mit Hilfe der Greenschen Funktionen. (Geeignete homogene Greensche Funktionen können anhand der Lösung von Punkt 7.2a erraten werden.)

In der Differentialgleichung aus dem Separationsansatz entlang der radialen Richtung erkennt der Physiker ein Sturm-Liouville-Problem.

7.3 Sturm-Liouville-Problem

a) Schreibe die Differentialgleichung (DGL)

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{B}{x^2}y = -\lambda y$$

in die Sturm-Liouville'sche Gestalt. Prüfe, dass diese wieder auf die ursprüngliche DGL führt.
(Das ist die DGL in radialer Richtung aus Beispiel 7.1b mit $r \to x$, $\Phi(r) \to y(x)$, wobei $A = -\lambda$ und B Parameter aus dem Separationsansatz sind.)
b) Transformiere die DGL in Sturm-Liouville'scher Gestalt durch die Sturm-Liouville'sche Transformation in die Liouville'sche Normalform auf dem Bereich $a < x < b$.
c) Prüfe durch Einsetzen, dass die Liouville'sche Normalform obiger DGL entspricht.
d) Finde für $B = 1/4$ und $y(a = 1) = y(b = 2) = 0$ die Lösungen der Liouville'schen Normalform durch geeigneten Ansatz und damit die Lösungen für $y(x)$. Prüfe dass diese Lösung obige DGL löst.
(Anmerkung: Für einen geschlossenen Ring würden nur ganzzahlige B Sinn machen, für welche die allgemeine Lösung obiger DGL durch die Bessel-Funktionen gegeben ist.)

Der Physiker glaubt, die Lösung gefunden zu haben. Bleibt nur die Frage, ob die Differentialgleichung aus 7.3a der Fuchsschen Klasse angehört? Wenn ja, dann gäbe es einen guten Grund, das Beispiel im nächsten Tutorium fortzusetzen, und den Weltuntergang somit vorläufig zu verschieben...

Ankreuzbar: 1a, 1b, 2a, 2b, 3abc, 3d