8. Tutorium **für 11.01.2013**

Eine Frage des letzten Tutoriums blieb noch offen, nämlich ob die Differentialgleichung aus Beispiel 7.3 der Fuchsschen Klasse angehört.

8.1 Fuchssche Klasse

a) Untersuche, ob folgende Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse angehört:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{B}{x^2}y = -\lambda y.$$

Wie lauten die charakteristischen Exponenten $\sigma_{1,2}$ an der Stelle $x = 0$? Wie an $x = \infty$? Gibt es Parameter B und λ für die alle singulären Punkte (einschließlich unendlich) regulär sind?
b) Gib eine Lösungsbasis für $\lambda = 0$ und $B > 0$ an.
c) Überprüfe die Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.
d) Finde für $\lambda \neq 0$ eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der generalisierten Potenzreihenentwicklung der Lösung an der Stelle $x = 0$.
e) Zeige, dass die Rekursionsformel auf eine generalisierte Potenzreihe führt, die proportional zu den Bessel-Funktionen ist,

$$J_\alpha(\tilde{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{\tilde{x}}{2}\right)^{2m+\alpha},$$

und schreibe die Lösung obiger Differentialgleichung mit Hilfe der Besselfunktionen. ($2\sqrt{B} \notin \mathbb{Z}$ darf angenommen werden.)
f) Überprüfe die Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

8.2 Greensche Funktion

Folgende Differentialgleichung sei gegeben:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 1\right) y(x) = 2.$$

a) Berechne eine zugehörige Greensche Funktion.
b) Überprüfe, dass eine homogene Greensche Funktion $e^{-(x-x')}$ lautet. Rate eine zweite homogene Greensche Funktion anhand der Lösung aus (a) und überprüfe, dass sie ebenfalls die homogene Differentialgleichung erfüllt.

c) Löse die Differentialgleichung auf $x \in [1,3]$ unter den Randbedingungen $y(1) = 2$ und $y(3) = 4$ mit Hilfe der Greenschen Funktionen.
d) Überprüfe, dass die Lösung die Randbedingungen und die Differentialgleichung erfüllt.

8.3 Separationsansatz

Separiere folgende Differentialgleichung

$$\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(x,y,z) = \left(\lambda + y^2\right) \Phi(x,y,z)$$

in Differentialgleichungen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen.

Nachdem der Weltuntergang verschoben wurde, kann ein Ausblick auf zukünftige Semester erfolgen: Die Greenschen Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie (5. Sem) wiederkehren. Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die „Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.

Ankreuzbar: 1a, 1bc, 1def, 2ab, 2cd, 3