8. Tutorium - Lösungen **11.01.2013**

8.1 Fuchssche Klasse

a) $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) y = 0 = y'' + d(x)y' + e(x)y$.
$\to d(x) = \frac{1}{x}$, $e(x) = -\frac{B}{x^2} + \lambda$.
Singuläre Punkte an $x_0 = 0$:
$\alpha_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)d(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)\frac{1}{x} = 1$.
$\beta_0 = \lim_{x\to 0}(x - x_0)^2 e(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)^2 \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) = -B$.
Charakteristische Exponenten:
$f_0(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0 = \sigma(\sigma - 1) + \sigma \times 1 - B = \sigma^2 - B$
$= (\sigma - \sqrt{B})(\sigma + \sqrt{B}) = 0$.
$\to \sigma_1 = \sqrt{B}$, $\sigma_2 = -\sqrt{B}$.

Singuläre Punkte um $x = \infty$: Transformation $t = 1/x$:
$u'' + \tilde{p}_1(t)u' + \tilde{p}_2(t)u = 0$ mit $\tilde{p}_1 = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}d(\frac{1}{t})$, $\tilde{p}_2 = \frac{1}{t^4}e(\frac{1}{t})$.
$\to \tilde{p}_1 = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}t = \frac{1}{t}$, $\tilde{p}_2 = \frac{1}{t^4}\left(-Bt^2 + \lambda\right) = -\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}$.
$\to u'' + \frac{1}{t}u' + \left(-\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}\right) u = 0$.
Singuläre Punkte bei $t = 0$:
$\alpha_0 = \lim_{t\to 0} t\tilde{p}_1(t) = \lim_{t\to 0} t\frac{1}{t} = 1$.
$\beta_0 = \lim_{x\to 0} t^2\tilde{p}_2(t) = \lim_{t\to 0} t^2 \left(-\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}\right) = -B + \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{t^2}$.
$\beta_0 \to \infty$ (irregulärer singulärer Punkt!)
Außer: $\lambda = 0$. Dann ist $\beta_0 = -B$ (regulärer singulärer Punkt). Für $\lambda = 0$ gilt:
$\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = -B$ (wie oben).
$\to \sigma_1 = \sqrt{B}$, $\sigma_2 = -\sqrt{B}$.
b)
Ansatz für generalisierte Potenzreihe: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^{n+\sigma}$.
$\to y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n + \sigma) x^{n+\sigma-1}$,
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n + \sigma)(n + \sigma - 1) x^{n+\sigma-2}$.
Einsetzen liefert:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) y = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma-2} w_n \left[(n + \sigma)(n + \sigma - 1) + (n + \sigma) - B\right] + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma} w_n \lambda}_{\sum_{n=2}^{\infty} x^{n+\sigma-2} w_{n-2}\lambda}$$

$= \sum_{n=0}^{1} x^{n+\sigma-2} w_n \left[(n + \sigma)^2 - B\right] + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n+\sigma-2} \left\{w_n \left[(n + \sigma)^2 - B\right] + w_{n-2}\lambda\right\}$.
$\to w_n \left[(n + \sigma)^2 - B\right] = 0$ für $n = 0$ oder $n = 1$;
$w_n \left[(n + \sigma)^2 - B\right] + w_{n-2}\lambda = 0$ für $n \geq 2$.
Für $\lambda = 0$ und mit $\sigma_{1,2} = \pm\sqrt{B}$: $w_n \left[\left(n \pm \sqrt{B}\right)^2 - B\right] = 0$.
Falls $\sqrt{B}$ irrational ist, kann das nur erfüllt sein für $w_0 = C \neq 0$, $w_{n>1} = 0$.
Für $\sigma_2 = -\sqrt{B}$ ganzzahlig ist auch $w_{2\sqrt{B}} = E \neq 0$ möglich, da $\left[\left(2\sqrt{B} - \sqrt{B}\right)^2 - B\right] = 0$.
$\to y_1(x) = Cx^{\sqrt{B}}$, $y_2(x) = x^{-\sqrt{B}}$ bzw. $y_2(x) = x^{-\sqrt{B}}\left(D + Ex^{2\sqrt{B}}\right)$ falls $\sqrt{B}$ ganzzahlig. Der Term proportional zu E entspricht aber gerade $y_1(x)$.
Kombinierte Lösung: $y(x) = Cx^{\sqrt{B}} + Dx^{-\sqrt{B}}$.
c) Einsetzen: $y'(x) = C\sqrt{B}x^{\sqrt{B}-1} - D\sqrt{B}x^{-\sqrt{B}-1}$, $y''(x) = C\sqrt{B}\left(\sqrt{B} - 1\right) x^{\sqrt{B}-2} + D\sqrt{B}\left(\sqrt{B} + 1\right) x^{-\sqrt{B}-2}$.

$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{B}{x^2}y=0=x^{\sqrt{B}-2}\underbrace{\left[C\sqrt{B}\left(\sqrt{B}-1\right)+C\sqrt{B}-BC\right]}_{=0}+x^{-\sqrt{B}-2}\underbrace{\left[D\sqrt{B}\left(\sqrt{B}+1\right)-D\sqrt{B}-BD\right]}_{=0}=0.$

d) Für $\lambda \neq 0$ gilt: $w_0=C\neq 0$, $w_1=0$,
$w_n\left[(n+\sigma)^2-B\right]+w_{n-2}\lambda=0$ für $n\geq 2$. D.h. nur gerade n verschwinden nicht: $w_{2m}\neq 0$, $w_{2m+1}=0$ für $m\in\mathbb{N}$.
$w_n=-\frac{w_{n-2}\lambda}{(n+\sigma)^2-B}=-\frac{w_{n-2}\lambda}{\left(n\pm\sqrt{B}\right)^2-B}=-\frac{w_{n-2}\lambda}{n^2\pm 2n\sqrt{B}}=-\frac{w_{n-2}\lambda}{n\left(n\pm 2\sqrt{B}\right)}$.
e) Generalisierte Potenzreihe: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n x^{\sigma+n}$.
Vergleich mit Bessel-Funktion: $v_m:=w_{2m}=w_n=-\frac{v_{m-1}\lambda}{2m\left(2m\pm 2\sqrt{B}\right)}=-\frac{v_{m-1}\lambda}{4m\left(m\pm\sqrt{B}\right)}$, $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}v_m x^{\sigma+2m}$.
Auflösen der Rekursion: $4\times 4\times\ldots\times 4=4^m=2^{2m}$.
$m(m-1)(m-2)\times\ldots\times 2\times 1=m!$.
$\left(m\pm\sqrt{B}\right)\left(m\pm\sqrt{B}-1\right)\times\ldots\times\left(\pm\sqrt{B}+1\right)=\frac{\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}{\Gamma(\pm\sqrt{B}+1)}$.
$\rightarrow v_m=v_0\frac{(-1)^m\Gamma(\pm\sqrt{B}+1)}{2^{2m}m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\lambda^m$.

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}v_0\frac{(-1)^m\Gamma(\pm\sqrt{B}+1)\lambda^m}{2^{2m}m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}x^{2m\pm\sqrt{B}}=\underbrace{v_0}_{=w_0}\frac{2^\sigma\Gamma(\pm\sqrt{B}+1)}{\sqrt{\lambda}^\sigma}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\frac{\sqrt{\lambda}^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}}}{2^{2m\pm\sqrt{B}}}$$

$$=\underbrace{w_0\frac{2^\sigma\Gamma(\pm\sqrt{B}+1)}{\sqrt{\lambda}^\sigma}}_{=:\tilde{w}_0}J_{\pm\sqrt{B}}(\sqrt{\lambda}x).$$

Lösung: $y(x)=C\,J_{\sqrt{B}}(\sqrt{\lambda}x)+D\,J_{-\sqrt{B}}(\sqrt{\lambda}x)$.
f) Probe:

$$y'(x)=\tilde{w}_0\sum_{m=0}^{\infty}\left(2m\pm\sqrt{B}\right)\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}-1},$$

$$y''(x)=\tilde{w}_0\sum_{m=0}^{\infty}\left(2m\pm\sqrt{B}\right)\left(2m\pm\sqrt{B}-1\right)\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}-2}.$$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(-\frac{B}{x^2}+\lambda\right)y=0=\tilde{w}_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}-2}$$
$$\times\left[\left(2m\pm\sqrt{B}\right)\left(2m\pm\sqrt{B}-1\right)+\left(2m\pm\sqrt{B}\right)-B\right]$$
$$+\lambda\tilde{w}_0\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}}}_{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(m\pm\sqrt{B})}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}-2}x^{2m\pm\sqrt{B}-2}}$$
$$=\tilde{w}_0\times\ldots\times\underbrace{\left[\left(\pm\sqrt{B}\right)^2-B\right]}_{=0}+\tilde{w}_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}-2}$$
$$\times\underbrace{\left[\left(2m\pm\sqrt{B}\right)^2-B+\lambda\frac{(-1)\,m\left(m\pm\sqrt{B}\right)2^2}{\sqrt{\lambda}^2}\right]}_{4m^2\pm 4m\sqrt{B}+B-B-4m^2-4m\left(\pm\sqrt{B}\right)=0}=0.$$

8.2 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x=\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1$, $f(x)=2$, $\mathcal{L}_x y(x)=f(x)$.
Ansatz: $G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)e^{ik(x-x')}dk$
und $\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$ einsetzen in
$\mathcal{L}_x G(x,x')=\delta(x-x')$,
$\left(\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1\right)G(x,x')=\delta(x-x')$,

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left(\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1\right)e^{ik(x-x')}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk,$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left((ik)^2+2ik+1\right)e^{ik(x-x')}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk.$
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\left(-k^2+2ik+1\right)=1. \quad\rightarrow\quad \tilde{G}(k)=\frac{1}{-k^2+2ik+1}=\frac{1}{-(k-i)^2}.$
(Etwas ausführlicher: Fourier-Transformation $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}$ auf beiden Seiten angewandt:

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(k^2+2ik+1\right)e^{ik(x-x')}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-x')}.$$
$$\rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(k^2+2ik+1\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')}.$$
$$\rightarrow \tilde{G}(k')\left(-k'^2-2ik'+1\right)=1.)$$

$G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k-i)^2}dk.$
Es gibt einen Pol zweiter Ordnung an der Stelle $k=i$. Um den Residuensatz anwenden zu können, wird die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ durch einen harmlosen Großkreis entweder oben oder unten geschlossen. Falls $x-x'>0$ kann man den Großkreis oben schließen ($ik=i(\mathrm{Re}k+i\mathrm{Im}k)=i\mathrm{Re}k-\mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k>0$ ist der Integrand exponentiell gedämpft). Das Integral ist über den Residuensatz als Summe über alle eingeschlossenen Residuen zu berechnen. Für $x-x'<0$ kann man den Großkreis unten schließen: hier sind keine Pole mehr eingeschlossen.
Für die Berechnung des Residuums eines Pols n-ter Ordnung verwendet man:
$\mathrm{Res}_{k\to c}\frac{1}{(n-1)!}\lim_{k\to c}\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}\left[(k-c)^n f(k)\right].$
Hier ist die Formel für $n=2$ anzuwenden:
$G(x,x')=H(x-x')\left[2\pi i\mathrm{Res}_{k\to i}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k-i)^2}\right]+H(x'-x)\times 0$
$=H(x-x')2\pi i\left[\frac{1}{1!}\lim_{k\to i}\frac{d}{dk}(k-i)^2\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k-i)^2}\right]$
$=H(x-x')\frac{2\pi i}{-2\pi}\left[\lim_{k\to i}\frac{d}{dk}e^{ik(x-x')}\right]=H(x-x')\left(-i\right)\left[\lim_{k\to i}e^{ik(x-x')}i\left(x-x'\right)\right]$
$=H(x-x')e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)=:G_I(x,x').$
b) Homogene Greensche Funktion: $G_{H1}=e^{-(x-x')}$.
Probe: $\left(\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1\right)e^{-(x-x')}=(-1)^2e^{-(x-x')}-2e^{-(x-x')}+e^{-(x-x')}=0$. Ok.
Rate: $G_{H2}=e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)$.
Probe: $\left(\frac{d^2}{dx^2}+2\frac{d}{dx}+1\right)e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)$

$$=\left[(-1)^2e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)-2e^{-(x-x')}+0\right]+2\left[-e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)+e^{-(x-x')}\right]+e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)=0$$

c) Beitrag der inhomogenen Greenschen Funktion für $1<x<3$:
$y(x)=\int_1^3 G_I(x,x')f(x')dx'=\underbrace{\int_1^3 H(x-x')}_{\int_1^x}e^{-(x-x')}\left(x-x'\right)\alpha dx'$

$$=2x\int_1^x e^{-(x-x')}dx'-2\int_1^x e^{-(x-x')}x'dx'$$
$$=2x\,e^{-(x-x')}\Big|_{x'=0}^{x}-2\left[e^{-(x-x')}x'\Big|_{x'=1}^{x}-\int_1^x e^{-(x-x')}dx'\right]$$
$$=2x\left(e^0-e^{-x+1}\right)-2\left[e^0x-e^{-x-1}-e^0+e^{-x+1}\right]$$
$$=2x\left(1-e^{1-x}\right)-2\left[x-e^{1-x}-1+e^{1-x}\right]$$
$$=2-2xe^{1-x}.$$

Das erfüllt die Randbedingungen noch nicht:
$y(1)=2-2e^0=0\neq 2,$
$y(3)=2-6e^{-2}\neq 4.$
Anpassen der Lösung mit Hilfe mit Hilfe zweier beliebiger linear unabhängigen homogenen Lösungen $y_H(x)$:
Wähle $y_{H1}(x)=G_{H1}(x,0)$ und $y_{H2}(x)=G_{H2}(x,0)$:
$y(x)=2-2xe^{1-x}+AG_{H1}(x,0)+BG_{H2}(x,0)$
$\quad=2-2xe^{1-x}+Ae^{-x}+Be^{-x}x.$
Anpassen an Randbedingungen:

$y(1) = 2 = 2 - 2e^0 + Ae^{-1} + Be^{-1} = (A + B)\, e^{-1}$.
$y(3) = 4 = 2 - 6e^{-2} + Ae^{-3} + Be^{-3}3$.
$A = -B + 2e. \to 0 = -2 - 6e^{-2} - Be^{-3} + 2e^{-2} + Be^{-3}3$
$B = \frac{2+4e^{-2}}{2e^{-3}} = e^3 + 2e$.
$A = -e^3$.
$\to y(x) = 2 - 2xe^{1-x} + \left(-e^3\right) e^{-x} + \left(e^3 + 2e\right) e^{-x} x$
$\quad = 2 - 2xe^{1-x} - e^{3-x} + e^{3-x}x + 2e^{1-x}x$
$\quad = 2 + e^{3-x}\,(x - 1)$.
<u>Probe</u>: $y(1) = 2$.
$y(3) = 2 + \left(e^0\right)(3 - 1) = 4$.
$\frac{d}{dx} y(x) = -e^{3-x}\,(x - 1) + e^{3-x} = e^{3-x}\,(-x + 2)$.
$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = e^{3-x}\,(x - 3)$.
$\mathcal{L}_x y(x) = e^{3-x}\,(x - 3) + 2e^{3-x}\,(-x + 2) + 2 + e^{3-x}\,(x - 1) = 2$.

8.3 Separationsansatz

$\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \Phi(x, y, z) = \left(\lambda + y^2\right) \Phi(x, y, z)$.
Ansatz: $\Phi(x, y, z) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)\Phi_3(z)$.
Ganze Gleichung durch $\Phi = \Phi_1\Phi_2\Phi_3$ dividieren:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right] + \frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + \frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi_3\right] = \lambda + y^2$.
Φ_3 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right] + \frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] - y^2 = -\frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi_3\right] + \lambda = A(x, y) = A(z) = A = const.$
$\to \Phi_3'(z) = (\lambda - A)\,\Phi_3(z)$.
Durch y dividieren, Φ_2 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right] = \frac{A}{y} - \frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + y = B(x) = B(y) = B = const.$
$\to \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1(x) = B\Phi_1(x)$
$\to \frac{\partial}{\partial y}\Phi_2(y) = \left(Ay + y^3 - By^2\right)\Phi_2(y)$.