10. Tutorium **für 24.01.2014**

10.1 Hypergeometrische Funktion

a) Zeige, dass für $|z| < 1$

$$ {}_1F_0(1; -; z) = \frac{1}{1-z}. $$

b) Zeige, dass

$$ x \cdot {}_0F_1(-; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}) = \sin x. $$

c) Zeige, dass für $0 < x < 1$

$$ {}_2F_1(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; x) = 3 \left[\frac{1}{2x^{3/2}} \log\left(\frac{1 + x^{1/2}}{1 - x^{1/2}} \right) - \frac{1}{x} \right]. $$

Hinweis: $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$ für $|x| < 1$.

10.2 Legendre-Polynome

a) Die Legendre-Polynome können mithilfe der Formel von Rodrigues berechnet werden:

$$ P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad \text{für } l \in \mathbb{N}_0. $$

Zeige mithilfe der Formel von Rodrigues:

$$ (2n+1) P_n(x) = \frac{d}{dx} P_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} P_{n-1}(x) $$

b) Die Legendre-Polynome haben die erzeugende Funktion

$$ g(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n $$

Berechne damit die ersten vier Legendrepolynome.

c) Gib die (für die sphärische Multipolentwicklung verwendete) Entwicklung von

$$ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} $$

für $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ mit Hilfe der Legendre-Polynome an, und berechne diese explizit bis $P_3(x)$.

10.3 Frobenius-Methode

a) Gegeben sei folgende Differentialgleichung mit konstanten a, b:

$$xy' - ay - bxy = 0.$$

Gib eine Lösungsbasis für $b = 0$ mit Hilfe eines Ansatzes für eine generalisierte Potenzreihe für $y(x)$ um den Punkt $x_0 = 0$ an. Führe die Probe durch.
b) Finde für $b \neq 0$ eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der generalisierten Potenzreihenentwicklung der Lösung an der Stelle $x_0 = 0$.
c) Leite aus der Rekursionsformel eine Lösung der Differentialgleichung her, die aus elementaren Funktionen besteht (also ohne Reihenentwicklung auskommt). Führe die Probe durch.

Ankreuzbar: 1ab, 1c, 2a, 2bc, 3a, 3bc

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: Die Methode der Greenschen Funktionen, Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie (5. Sem) wiederkehren. Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die „Mathematischen Methoden“ eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.