10. Tutorium - Lösungen **24.01.2014**

10.1 Hypergeometrische Funktion

a) ${}_1F_0(1;-;z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j}{1}\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1)_j}{1}\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j!}{1}\frac{z^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$,
mit dem Pochhammer Symbol $(a)_j = a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+j-1) = \Gamma(a+j)/\Gamma(a) = (a+j-1)!/(a-1)!$.
b) $x\cdot {}_0F_1(-;\frac{3}{2};-\frac{x^2}{4}) = x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(\frac{3}{2})_j}\frac{1}{j!}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^j$
$= x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{2^j(\frac{3}{2})_j}\frac{x^{2j}}{2^j j!} = x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{2^j\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots(\frac{3}{2}+j-1)}\frac{x^{2j}}{2^j 1\times 2\times\ldots\times j} = x\cdot\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{1}{3\times 5\times\ldots\times(2j+1)}\frac{x^{2j}}{2\times 4\times\ldots\times(2j)}$
$= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sin x$.
c) ${}_2F_1(1,\frac{3}{2};\frac{5}{2};x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j}\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1)_j(\frac{3}{2})_j}{(\frac{5}{2})_j}\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3}{2j+3}x^j$
mit $\frac{(\frac{3}{2})_j}{(\frac{5}{2})_j} = \frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2j-1)\cdot(2j+1)}{5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2j+1)\cdot(2j+3)} = \frac{3}{2j+3}$.
${}_2F_1(1,\frac{3}{2};\frac{5}{2};x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{3}{2j+3}x^j = 3\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+3}x^j = 3\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+3}\left(\sqrt{x}\right)^{2j} = 3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2j-2}$
$= \frac{3}{\left(\sqrt{x}\right)^3}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2j+1} = \frac{3}{\left(\sqrt{x}\right)^3}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2j+1}\left(\sqrt{x}\right)^{2j+1} - \frac{1}{1}\left(\sqrt{x}\right)^1\right]$
$= \frac{3}{\left(\sqrt{x}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\times 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\sqrt{x}\right)^{2k-1} - \sqrt{x}\right] = \frac{3}{\left(\sqrt{x}\right)^3}\left[\frac{1}{2}\times\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) - \sqrt{x}\right]$
$= 3\left[\frac{1}{2x^{3/2}}\log\left(\frac{1+x^{1/2}}{1-x^{1/2}}\right) - \frac{1}{x}\right]$.

10.2 Legendre Polynome

a) Die Formel von Rodrigues lautet:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \quad \text{für } l\in\mathbb{N}_0.$$

Zuerst berechnen wir:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial}{\partial x}P_{n+1}(x) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+2}}{\partial x^{n+2}}(x^2-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}(n+1)2x(x^2-1)^n \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

Weiters:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\partial}{\partial x}P_{n-1}(x) \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} a-b &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[(x^2-1)^n + 2nx^2(x^2-1)^{n-1} - 2n(x^2-1)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[(x^2-1)^n + 2n(x^2-1)(x^2-1)^{n-1}\right] \\ &= (2n+1)\frac{1}{2^n}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n \\ &= (2n+1)P_n(x). \end{aligned}$$

Damit ist die Relation bewiesen.
b) Um das Resultat zu erhalten müssen wir die Taylor-Reihe von $g(x,z)$ um $z=0$ bilden.

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} g(x,0) z^n$$

(saloppe Notation: erst nach z ableiten, dann $z=0$ setzen). Um die ersten vier Legendre-Polynome zu erhalten, müssen wir bis zur Ordnung $n=3$ gehen. Die Ableitungen an $z=0$ sind

$$\begin{aligned}
g(x,0) &= 1, \\
\frac{\partial g}{\partial z}(x,0) &= (x-z)(1-2xz+z^2)^{-3/2}|_{z=0} = x, \\
\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x,0) &= (3x^2-4xz+2z^2-1)(1-2xz+z^2)^{-5/2}|_{z=0} = 3x^2-1, \\
\frac{\partial^3 g}{\partial z^3}(x,0) &= 15x^3-9x.
\end{aligned}$$

Daher haben wir bis zur 3. Ordnung

$$g(x,z) = 1 + xz + \frac{1}{2}(3x^2-1)z^2 + \frac{1}{2}(5x^3-3x)z^3$$

woraus die Legendre-Polynome abgelesen werden

$$P_0(x)=1 \quad P_1(x)=x \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \quad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

c)
In Kugelkoordinaten findet sich $g(x,z)$ im Ausdruck:
$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'+r'^2}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'\left(\frac{r'}{r}\right)+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}')$.
Also $z=r'/r$, und mit $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'=xz=xr'/r$ folgt $x=\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/(rr')=\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'$.
Mit $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$ erhält man:
$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^0 P_0(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}') + \left(\frac{r'}{r}\right)^1 P_1(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}') + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 P_2(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}') + \left(\frac{r'}{r}\right)^3 P_3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}') + O\left(\frac{r'^4}{r^4}\right)\right]$
$= \frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}' + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'\right)^2-1\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^3\frac{1}{2}\left(5\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'\right)^3-3\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'\right) + O\left(\frac{r'^4}{r^4}\right)\right]$
$= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right)^2-r^2r'^2}{2r^5} + \frac{5\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right)^3-3\left(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'\right)r^2r'^2}{2r^7} + O\left(\frac{r'^4}{r^5}\right)$
Anmerkung: Mit dem Winkel $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}'=\cos\theta$ zwischen $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{r}}'$ kann man das Resultat auch schreiben als:
$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'+r'^2}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\cos\theta\left(\frac{r'}{r}\right)+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\theta)$
$= \frac{1}{r}\left[1+\frac{r'}{r}\cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^3\frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta-3\cos\theta\right) + O\left(\frac{r'^4}{r^4}\right)\right]$.

10.3 Frobenius-Methode

a) Ansatz für generalisierte Potenzreihe: $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n x^{n+\sigma}$.
$\rightarrow y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n\,(n+\sigma)\,x^{n+\sigma-1}$,
Einsetzen für $b=0$ liefert: $xy'-ay=0=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma}w_n\,[(n+\sigma)-a]$.
$\rightarrow w_n\,(n+\sigma-a)=0$.
Für $n=0$ und $w_0\neq 0$ ist das nur erfüllt, wenn $\sigma=a$.
Für $n>0$, $n\in\mathbb{N}_0$ ist $n+\sigma-a=n>0$, daher muss $w_n=0$ für $n>0$ gelten.
Lösung$\rightarrow y(x)=w_0x^a$.
<u>Probe</u>: $y'(x)=w_0ax^{a-1}$.
$xy'-ay=xw_0ax^{a-1}-aw_0x^a=0$.
b) Für $b\neq 0$ gilt:

$xy' - ay - bxy = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma} w_n \left[(n+\sigma) - a\right] - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} bx^{n+\sigma+1} w_n}_{\sum_{n=1}^{\infty} bx^{n+\sigma} w_{n-1}}$

$= x^{\sigma} w_0 \left[\sigma - a\right] + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+\sigma} \left[w_n \left[(n+\sigma) - a\right] - bw_{n-1}\right]$

$\overset{\sigma = a}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+a} \left[nw_n - bw_{n-1}\right]$.

Rekursionsformel: $w_n = \frac{b}{n} w_{n-1}$, $w_0 \neq 0$.

c) $w_1 = \frac{b}{1} w_0$, $w_2 = \frac{b}{2} w_1 = \frac{b}{2}\frac{b}{1} w_0$, etc.

Allgemein: $w_n = \frac{b^n}{n!} w_0$.

Für $\sigma = a$ folgt:

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w_0 x^{n+a} = w_0 x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} x^n = w_0 x^a e^{bx}$.

<u>Probe</u>: $y'(x) = w_0 a x^{a-1} e^{bx} + w_0 x^a b e^x$.

$xy' - ay - bxy = w_0 a x^a e^{bx} + w_0 x^{a+1} b e^{bx} - a w_0 x^a e^{bx} - b w_0 x^{a+1} e^{bx} = 0$.