**2. Tutorium** **für 18.10.2013**

## 2.1 Multiple Choice Fragen

a) Matrixinversion: Gegeben sei eine Matrix $A$ mit Komponenten $A_{mn} = m + 2n - 2$. Berechne die Inverse $A^{-1}$.
b) Integral 1: $\int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = ?$
c) Integral 2: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = ?$
d) Flächenintegral: In der Ebene lautet der Gauß'sche Integralsatz $\int\int_B \mathrm{div}\vec{K}dxdy = \int_{\partial B} \vec{K}\cdot\vec{n}ds$, wobei $\vec{n}$ normal auf die Kurve $\partial B$ steht und nach außen zeigt. Berechne das Flächenintegral für $\vec{K} = \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix}$ und den Bereich $B$, der vom Dreieck $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ eingeschlossen wird. (In 2 Dimensionen gilt $\mathrm{div}\vec{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\cdot\vec{K}$).
e) (Fortgesetzt) Linienintegral 1: Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_1} \vec{K}\cdot\vec{n}ds$, wobei $C_1$ die beiden Streckenabschnitte von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$ und von $\vec{b}$ nach $\vec{c}$ beinhaltet.
f) (Fortgesetzt) Linienintegral 2: Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_2} \vec{K}\cdot\vec{n}ds$, wobei $C_2$ die Strecke von $\vec{c}$ nach $\vec{a}$ beinhaltet.

## 2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodass $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2} x^i\mathbf{e}_i = x^i\mathbf{e}_i = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2$. Der selbe Punkt (auf dem Papier) soll nun in der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ mit $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.
a) Skizziere die alte und neue Basis graphisch. Lies die Koordinaten $x'^1$ und $x'^2$ von $\mathbf{x}$ in der neuen Basis aus der Skizze ab, für die gilt $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'^i\mathbf{f}_i$.
b) Berechne die Koordinaten $x'^i$ durch Lösung des Gleichungssystems $x^i\mathbf{e}_i = x'^i\mathbf{f}_i$ nach den beiden Variablen $x'^1$ und $x'^2$, und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze in etwa übereinstimmt. (Führe auch die Probe durch: $x'^i\mathbf{f}_i = x^i\mathbf{e}_i = \mathbf{x}$).

c) Durch welche Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ wird die alte Basis in die neue transformiert, also $\mathbf{f}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$?
d) Berechne die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und zeige, dass sich die Komponenten $x'^i$ über $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ berechnen lassen[1].

## 2.3 Duale Basis (Fortsetzung von 2.2)

a) Die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ definiert. (Wir verwenden hier ein Skalarprodukt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zwischen dualen und normalen Basisvektoren. Es gilt $\delta_{ij} = \delta^i_j = 1$ für $i = j$ und 0 sonst.) Schreibe die vier Gleichungen $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ separat auf (für $i = 1$, $j = 1$; dann für $i = 1$, $j = 2$; etc.) und erkläre jede davon in Worten. (z.B. „... muss orthogonal auf ... sein.“, „Das Skalarprodukt zwischen ... und ... muss 1 ergeben“.)
b) Bestimme anhand der Einschränkungen aus Punkt 2.3a durch geometrische Konstruktion die Richtungen (zwar noch ohne genaue Länge, aber schon ob „vor“ oder „zurück“), in die die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ zeigen müssen. (Als Basisvektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ sind die aus Beispiel 2.2 zu nehmen).
c) Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^*$ durch Matrixinversion, und überprüfe, dass $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ für alle Kombinationen von $i$ und $j$ gilt.
d) Zeichne die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ ein, und überprüfe, ob die Richtung aus 2.3b gestimmt hat.
e) Lies die zur dualen Basis gehörenden Koordinaten $x'_1$ und $x'_2$ vom Punkt $\mathbf{x}$ aus Beispiel 2.2 aus der Skizze ab, für die gilt $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i = x'_i \mathbf{f}^i$.
f) Berechne die zur dualen Basis gehörenden Koordinaten $x'_1$ und $x'_2$ durch Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{f}^i$ (oder durch Invertieren und Anwenden einer geeigneten Transformationsmatrix), und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze in etwa übereinstimmt.
g) Berechne den Abstand über $l = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ und vergleiche mit $l' = \sqrt{x'^i x'_i}$.
h) (Zum Nachdenken) Wie lassen sich die Längen von $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ in Punkt 2.3b geometrisch (d.h. nur mit Zirkel und Lineal) konstruieren?

---

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-d, 3a-d, 3e-g, 3h

[1] Daher folgt auch die Sprechweise, dass die „KOvarianten Basisvektoren“ MIT der Transformationsmatrix $A$ transformieren, wohingegen die „KONTRAvarianten Vektorkomponenten“ GEGEN die Transformationsmatrix $A$ (oder MIT der Inversen $A^{-1}$) transformieren.