2. Tutorium - Lösungen **18.10.2013**

1.1 Multiple Choice Fragen

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Gauß-Jordan-Algorithmus: $(A|\,I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2I \end{array}$

$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} +\frac{3}{2}II \\ \times\frac{-1}{2} \end{array} \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad = (I|\,A^{-1})$

Alternative Berechnung der Inversen:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1\times 4 - 2\times 3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

b) Verwende $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \left[1 - \sin^2(x)\right] - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

$\rightarrow \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Damit lässt sich das Integral schreiben als:

$\rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2(x)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{2} - 0 - 0 = \pi.$

c) Verwende $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

$\rightarrow \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)dx = -\frac{1}{4}\cos(2x)\big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{4}\left[1-(-1)\right] = -\frac{1}{2}.$

d) $\int\int_B \operatorname{div}\vec{K}dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} dy \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix} = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} dy\,[2+x]$

$= \int_0^2 dx\,[2+x]\,y|_{y=0}^{\frac{2-x}{2}} = \int_0^2 dx\left[(2+x)\,\frac{2-x}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(4-x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{8}{3}.$

e) Von $\vec{a}$ nach $\vec{b}$: $\int_1^0 \vec{K}\cdot\vec{n}dy = \int_1^0 \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dy = -\,2x\int_1^0 dy\Big|_{x=0} = 0.$

Von $\vec{b}$ nach $\vec{c}$: $\int_0^2 \vec{K}\cdot\vec{n}dx = \int_0^2 \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx = -\,y\int_0^2 xdx\Big|_{y=0} = 0$. Summe aus beiden ist 0.

f) Von $\vec{c}$ nach $\vec{a}$ wähle Parametrisierung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,(1-t) \\ t \end{pmatrix}$ für $t \in [0;1]$.

Parametrisierung über Länge $s \in [0;\sqrt{5}]$ mit $s = \sqrt{5}t$, $ds = \sqrt{5}dt$.

Normalvektor $\vec{n}ds = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt.$

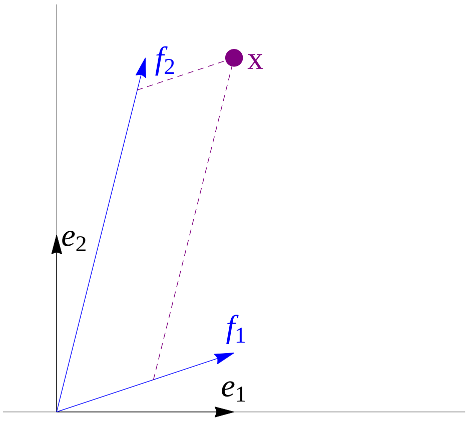
(Alternative: Normalenvektor aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt$ berechnen).

Somit wird $\int_0^1 \vec{K}\cdot\vec{n}ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2x \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\,(2-2s) \\ (2-2s)\,s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ds$

$= \int_0^1 \left[4 - 4s + 4s - 4s^2\right] ds = 4\int_0^1 \left(1 - s^2\right) ds = 4\left(s - \frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$

2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

a)



b) Lösen von $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x'^1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + x'^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ (Gleichungssystem mit 2 Variablen) liefert:
$x'^1 = \frac{6}{11} \approx 0,55$, $x'^1 = \frac{10}{11} \approx 0,91$.

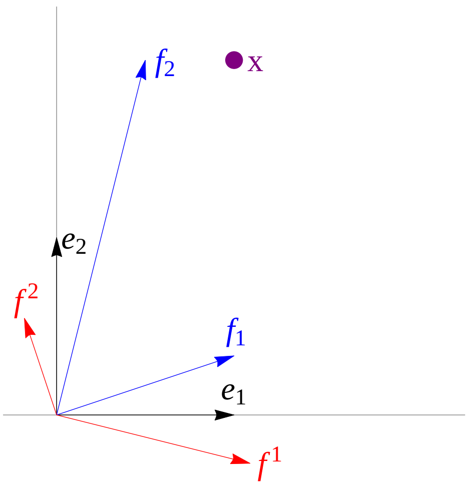
c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}$.

2.3 Duale Basis (Fortsetzung von 2.2)

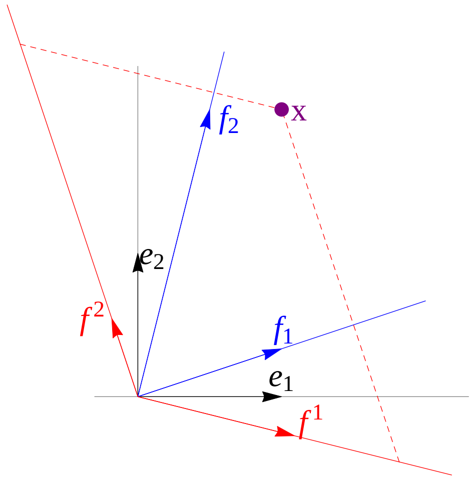
a)
$\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = \delta^1_1 = 1$: „Das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}_1$ muss 1 ergeben“ .
$\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_2 = \delta^1_2 = 0$: „$\mathbf{f}^1$ muss orthogonal auf $\mathbf{f}_2$ sein.“
$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_1 = \delta^2_1 = 0$: „$\mathbf{f}^2$ muss orthogonal auf $\mathbf{f}_1$ sein.“
$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_2 = \delta^2_2 = 1$: „Das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{f}^2$ und $\mathbf{f}_2$ muss 1 ergeben“ .
b)



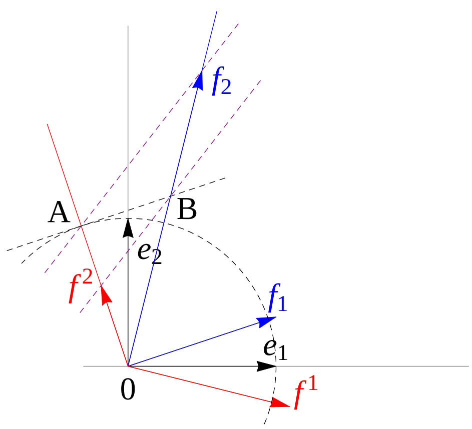
c) Basisvektoren in Spalten: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{matrix}} \right)$.

Duale Basisvektoren aus Zeilen von $\mathbf{B}^{-1}$ ablesen:
$\mathbf{B}^{-1} = \left(\begin{matrix} \boxed{\frac{12}{11} \quad -\frac{3}{11}} \\ \boxed{-\frac{2}{11} \quad \frac{6}{11}} \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$. Daher: $\mathbf{f}^1 = \left(\frac{12}{11} \quad , -\frac{3}{11} \right)$, $\mathbf{f}^2 = \left(-\frac{2}{11} \quad , \frac{6}{11} \right)$.

Probe:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 \end{pmatrix}$.
d) siehe (b).
e)



f) Berechnung über $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'_i\mathbf{f}^i \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x'_1 \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ -\frac{3}{11} \end{pmatrix} + x'_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$. Lösung des Gleichungssystems liefert: $x'_1 = \frac{5}{3}$; $x'_2 = \frac{9}{2}$.
Alternative Berechnung über $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,67 \\ 4,5 \end{pmatrix}$.
(Im Euklidischen Raum fallen Basen und duale Basen zusammen und es gilt $x^1 = x_1$, $x^2 = x_2$).
g) $l = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
$l' = \sqrt{x'^i x'_i} = \sqrt{x'_i x'^i} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{6}{11} + \frac{9}{2}\frac{10}{11}} = \sqrt{\frac{55}{11}} = \sqrt{5}$.
Man erhält die gleiche Länge, unabhängig von der Wahl einer Basis.
h)



In Richtung von $\mathbf{f}^2$ die Länge 1 auftragen (Punkt A), von dort eine Normale zeichnen und mit $\mathbf{f}_2$ schneiden (Punkt B). Das Skalarprodukt von $\mathbf{a} := \overline{0A}$ und $\mathbf{b} := \overline{0B}$ ist per Konstruktion $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$. Um die Länge $|\mathbf{f}^2|$ zu finden, wende man den Strahlensatz an: $|\mathbf{f}_2| : |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| : |\mathbf{f}^2|$. Somit ist $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = |\mathbf{f}_2||\mathbf{f}^2|$ und mit dem Winkel φ zwischen $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}$ (bzw. zwischen $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}^2$) gilt $1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi = |\mathbf{f}_2||\mathbf{f}^2| \cos\varphi = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}^2 = 1$.
Wenn man möchte, lässt sich das alles nur mit Zirkel und Lineal konstruieren (Normale zu einer Geraden durch einen Punkt erhält man folgendermaßen: Vom Punkt aus einen Kreis zeichnen, der die Gerade 2x schneidet. Von den Schnittpunkten zwei gleich große Kreise zeichnen, die sich 2x schneiden. Die Gerade

durch diese 2 Punkte ist normal auf die ursprüngliche Gerade. Eine Normale zur Normalen ergibt dann eine Parallele.)