3. Tutorium **für 25.10.2013**

3.1 Multiple Choice Fragen

a) Pauli-Matrizen 1: Berechne den Kommutator $[\sigma_1, \sigma_3]$ und gib das Ergebnis mit Hilfe von Pauli-Matrizen an.
b) Pauli-Matrizen 2: Berechne $[\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_1 + \sigma_3]$ und gib das Ergebnis mit Hilfe von Pauli-Matrizen an.
c) Projektor: $\mathbf{E_x}$ sei der Projektor zum Vektor $\mathbf{x}$. Vereinfache $(\mathbf{1} + \mathbf{E_x})^n \, \mathbf{x}$.
d) Flächenintegral: Berechne das Flächenintegral $\int\int_B \mathrm{div}\vec{K} dxdy$ für $\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix}$ und den Bereich B, der von der x-Achse und der Kurve $y = \sin(x)$ für $x \in [0, \pi]$ eingeschlossen wird.
e) (Fortgesetzt) Linienintegral 1: Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_1} \vec{K} \cdot \vec{n} ds$, wobei C_1 den Streckenabschnitt entlang der x-Achse beinhaltet.
f) (Fortgesetzt) Linienintegral 2: Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_2} \vec{K} \cdot \vec{n} ds$, wobei C_2 die Strecke entlang der Sinusfunktion beinhaltet.

3.2 Spektraltheorem

a) Bestimme die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die zugehörigen Projektoren $\mathbf{E}_i$ und überprüfe, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.
c) Welche Matrix erhält man für $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_i$?
d) Gib Polynome $p_i(t)$ an, für die $p_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ gilt.
e) Überprüfe für eines der Polynome, dass $p_i(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_i$.

3.3 Funktionen von Matrizen

Funktionen von Matrizen lassen sich über deren Taylor-Reihe definieren, z.B. $\exp(\mathbf{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$. Zeige, dass für invertierbare quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt:
a) $\sin(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \sin(\mathbf{B})\, \mathbf{A}$.

b) $\exp(i\alpha\sigma_i) = \mathbf{I}\cos(\alpha) + i\sigma_i\sin(\alpha)$, für die Pauli-Matrizen σ_i und reellem α. (Hinweis: Berechne zunächst $(\sigma_i)^2$, $(\sigma_i)^3$, ...)
c) $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k}\exp(\lambda_i)\mathbf{E}_i$, wobei $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i$ nach dem Spektraltheorem.
d) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}}$ (Hinweis: „Diagonalisiere“ $\mathbf{A}$ über $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}$ und verwende die Produktregel für Determinanten bzw. die zyklische Vertauschung von Matrizen unter der Spur, um $\mathbf{S}$ „loszuwerden“).
e) $\ln(\det B) = \mathrm{Tr}(\ln B)$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2de, 3a-c, 3de