3. Tutorium - Lösungen **25.10.2013**

3.1 Multiple Choice Fragen

a) $\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2$.
$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$.
$[\sigma_1, \sigma_3] = \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2 + i\sigma_2 = -2i\sigma_2$.
b) $[\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_1 + \sigma_3] = \underbrace{[\sigma_1, \sigma_1]}_{0} - \underbrace{[\sigma_3, \sigma_1]}_{2i\sigma_2} + \underbrace{[\sigma_1, \sigma_3]}_{-2i\sigma_2} - \underbrace{[\sigma_3, \sigma_3]}_{0} = -4i\sigma_2$.
c) Es gilt: $\mathbf{1x} = \mathbf{x}$. $\mathbf{E_x x} = \mathbf{x}$. $\mathbf{E_x^2} = \mathbf{E_x}$.
Daher: $(\mathbf{1} + \mathbf{E_x})^n\, \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \mathbf{1}^n \mathbf{E}_\mathbf{x}^{n-i}\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} \mathbf{x} = 2^n\mathbf{x}$ mit Binomialkoeffizienten $\begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.
d) $\int\int_B \mathrm{div}\vec{K} dxdy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy\, [1 + 1]$
$= \int_0^\pi dx\; 2y|_{y=0}^{\sin x} = 2\int_0^\pi dx \sin x = -2\, \cos x|_0^\pi = 4$.
e) Parametrisierung entlang x-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$.
$\vec{n}\, dt = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt$.
$\int_0^\pi \vec{K} \cdot \vec{n} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = -\int_0^\pi \left(0 + t^2\right) dt = -\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^\pi = -\frac{\pi^3}{3}$.
f) Parametrisierung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \pi - t \\ \sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$.
$\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt$.
Somit wird $\int_0^\pi \vec{K} \cdot \vec{n} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} (\pi - t) + (\sin t)^2 \\ \sin t + (\pi - t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt$
$= \int_0^\pi \left[(\pi - t)\cos t + \sin^2 t \cos t + \sin t + (\pi - t)^2\right] dt = 2 + 0 + 2 + \frac{\pi^3}{3} = 4 + \frac{\pi^3}{3}$.
Lösung der einzelnen Integrale:

- Partielles Integrieren: $\int_0^\pi (\pi - t)\cos t\, dt = (\pi - t)\sin t|_0^\pi - \int_0^\pi (-1)\sin t\, dt = 0 - \cos t|_0^\pi = 2$.
- Stammfunktion erraten: $\int \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{\sin^3 t}{3} + c$.

3.2 Spektraltheorem

a) Säkulardeterminante: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ führt zu $(-\lambda)\left[(1 - \lambda)(-\lambda) - 1\right] + \lambda + 0 = 0 \quad\rightarrow\quad \lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0$.
Eigenwerte: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad\rightarrow\quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$.
Zugehörige Eigenvektoren: für $\lambda_3 = 0$:

$$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\,\mathbf{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Lösen des Gleichungssystems mit 3 Variablen liefert $x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, was z.B. durch den Vektor $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ erfüllt wird.

Analog findet man für $\lambda_1 = 2$:

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathrm{x}_1 = 0, \text{ also } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Und für $\lambda_2 = -1$ folgt $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Normierte Eigenvektoren: $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Projektoren:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (1,-2,1) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1,1,1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_3^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1,0,-1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spektrale Form:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i = 2 \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

c) Man erhält die Identitätsmatrix:

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

d) $p_i(t) = \prod_{1 \le j \le k,\, j \ne i} \frac{t-\lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

$p_1(t) = \frac{t-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \frac{t-\lambda_3}{\lambda_1-\lambda_3} = \frac{t+1}{2+1} \frac{t-0}{2-0} = \frac{1}{6} t\,(t+1)\,,$

$p_2(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \frac{t-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} = \frac{t-2}{-1-2} \frac{t-0}{-1-0} = \frac{1}{3} t\,(t-2)\,,$

$p_3(t) = \frac{t-\lambda_1}{\lambda_3-\lambda_1} \frac{t-\lambda_2}{\lambda_3-\lambda_2} = \frac{t-2}{0-2} \frac{t+1}{0+1} = -\frac{1}{2}\,(t-2)\,(t+1)\,.$

e) z.B.

$$p_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \mathbf{A}\,(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1.$$

3.3 Funktionen von Matrizen

a) $\sin\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^3 + \ldots$

$= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} - \frac{1}{3!}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\mathbf{A} + \ldots$

$= \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{B} - \frac{1}{3!}\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{B} + \ldots\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\sin(\mathbf{B})\,\mathbf{A},$

oder
$\sin\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{2n+1}\mathbf{A}}{(2n+1)!}=\mathbf{A}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathbf{B}^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\sin\left(\mathbf{B}\right)\mathbf{A}$.
b) $\exp(i\alpha\sigma_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$=\mathbf{I}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!}+i\sigma_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}=\mathbf{I}\cos(\alpha)+i\sigma_i\sin(\alpha)$,
mit $(\sigma_i)^2=\sigma_i\sigma_i=\mathbf{I}$, $(\sigma_i)^3=\sigma_i$, etc.
c) $\exp(\mathbf{A})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{E}_i\right)^n\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^n\underbrace{\mathbf{E}_i^n}_{\mathbf{E}_i}\right)$
$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\lambda_i^n\mathbf{E}_i=\sum_{i=1}^{k}\exp\left(\lambda_i\right)\mathbf{E}_i$. ((*) Das gilt, da $E_iE_j=0$ für $i\neq j$.)
d) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)=\det\left(e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}}\right)=\det\left(\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}_D}\mathbf{S}\right)=\det\left(\mathbf{S}^{-1}\right)\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)\det\left(\mathbf{S}\right)=\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)$. Per Konstruktion sind nur Diagonalelemente von $\mathbf{A}_D$ besetzt: $\mathbf{A}_D=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$.

$$e^{\mathbf{A}_D}=\mathbf{1}+\mathbf{A}_D+\frac{1}{2}\mathbf{A}_D^2+\ldots=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&\lambda_n\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^2&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&\lambda_n^2\end{pmatrix}+\ldots$$

$$=\begin{pmatrix}1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\ldots&0&\cdots&0\\0&1+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\ldots&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&1+\lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\ldots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

$$\to\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)=\det\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&&0\\\vdots&&\ddots&\\0&0&&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}=e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\ldots e^{\lambda_n}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

Das stimmt mit der rechten Seite überein: $e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}}=e^{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}\right)}=e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}_D}=e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$.
e) Man könnte analog wie oben die Reihendarstellung verwenden:
$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ (für $-1<x<1$), indem man für x die Matrix $x=\mathbf{B}-\mathbf{1}$ einsetzt. (Reihe konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{B}-\mathbf{1}$ vom Betrag kleiner 1 sind).
Einfacher macht man es sich, indem man $e^{\mathbf{A}}=\mathbf{B}$ setzt, und die Umkehroperation $\mathbf{B}=\ln\mathbf{A}$ nennt (durch Einsetzten der Reihendarstellungen ineinander sieht man, dass das tatsächlich konsistent ist). Dann folgt:
$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right)=e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}}\ \to\ \det\left(\mathbf{B}\right)=e^{\mathrm{Tr}(\ln\mathbf{B})}\ \overset{\ln}{\to}\ \ln\left(\det\mathbf{B}\right)=\mathrm{Tr}\left(\ln\mathbf{B}\right)$.