

3. Tutorium - Lösungen

25.10.2013

3.1 Multiple Choice Fragen

a) $\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_2.$

$\sigma_3\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2.$

$[\sigma_1, \sigma_3] = \sigma_1\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2 + i\sigma_2 = -2i\sigma_2.$

b) $[\sigma_1 - \sigma_3, \sigma_1 + \sigma_3] = \underbrace{[\sigma_1, \sigma_1]}_0 - \underbrace{[\sigma_3, \sigma_1]}_{2i\sigma_2} + \underbrace{[\sigma_1, \sigma_3]}_{-2i\sigma_2} - \underbrace{[\sigma_3, \sigma_3]}_0 = -4i\sigma_2.$

c) Es gilt: $\mathbf{1x} = \mathbf{x}$. $\mathbf{E_x x} = \mathbf{x}$. $\mathbf{E_x}^2 = \mathbf{E_x}$.

Daher: $(\mathbf{1} + \mathbf{E_x})^n \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{1}^i \mathbf{E_x}^{n-i} \mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \mathbf{x} = 2^n \mathbf{x}$ mit Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

d) $\int \int_B \text{div} \vec{K} dx dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} dy [1 + 1]$
 $= \int_0^\pi dx 2y \Big|_{y=0}^{\sin x} = 2 \int_0^\pi dx \sin x = -2 \cos x \Big|_0^\pi = 4.$

e) Parametrisierung entlang x -Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$.

$\vec{n} dt = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt.$

$\int_0^\pi \vec{K} \cdot \vec{n} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = - \int_0^\pi (0 + t^2) dt = - \frac{t^3}{3} \Big|_0^\pi = -\frac{\pi^3}{3}.$

f) Parametrisierung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \pi - t \\ \sin(\pi - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi - t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \pi]$.

$\vec{n} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt.$

Somit wird $\int_0^\pi \vec{K} \cdot \vec{n} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} x + y^2 \\ y + x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} (\pi - t) + (\sin t)^2 \\ \sin t + (\pi - t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt$
 $= \int_0^\pi [(\pi - t) \cos t + \sin^2 t \cos t + \sin t + (\pi - t)^2] dt = 2 + 0 + 2 + \frac{\pi^3}{3} = 4 + \frac{\pi^3}{3}.$

Lösung der einzelnen Integrale:

- Partielles Integrieren: $\int_0^\pi (\pi - t) \cos t dt = (\pi - t) \sin t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi (-1) \sin t dt = 0 - \cos t \Big|_0^\pi = 2.$

- Stammfunktion erraten: $\int \sin^2 t \cos t dt = \frac{\sin^3 t}{3} + c.$

3.2 Spektraltheorem

a) Säkular determinante: $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ führt zu $(-\lambda)[(1 - \lambda)(-\lambda) - 1] + \lambda + 0 =$

$0 \rightarrow \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0.$

Eigenwerte: $\lambda_3 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$

Zugehörige Eigenvektoren: für $\lambda_3 = 0$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \mathbf{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \text{ Lösen}$$

des Gleichungssystems mit 3 Variablen liefert $x_2 = 0, x_1 + x_3 = 0$, was z.B. durch den Vektor $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

erfüllt wird.

Analog findet man für $\lambda_1 = 2$:

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \mathbf{x}_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = 0, \text{ also } \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Und für $\lambda_2 = -1$ folgt $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Normierte Eigenvektoren: } \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Projektoren:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_1^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (1, -2, 1) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_2^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 1, 1) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{x}_3 \otimes \mathbf{x}_3^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} (1, 0, -1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spektrale Form:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{E}_i &= 2 \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}. \end{aligned}$$

c) Man erhält die Identitätsmatrix:

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

$$d) p_i(t) = \prod_{1 \leq j \leq k, j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

$$p_1(t) = \frac{t - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{t - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} = \frac{t+1}{2+1} \frac{t-0}{2-0} = \frac{1}{6} t(t+1),$$

$$p_2(t) = \frac{t - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{t - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} = \frac{t-2}{-1-2} \frac{t-0}{-1-0} = \frac{1}{3} t(t-2),$$

$$p_3(t) = \frac{t - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \frac{t - \lambda_2}{\lambda_3 - \lambda_2} = \frac{t-2}{0-2} \frac{t+1}{0+1} = -\frac{1}{2} (t-2)(t+1).$$

e) z.B.

$$p_1(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \mathbf{A} (\mathbf{A} + \mathbf{I}) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1.$$

3.3 Funktionen von Matrizen

$$a) \sin(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} - \frac{1}{3!} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A})^3 + \dots$$

$$= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} - \frac{1}{3!} \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}} \underbrace{\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{B} \mathbf{A} + \dots$$

$$= \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} - \frac{1}{3!} \mathbf{B} \mathbf{B} \mathbf{B} + \dots) \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1} \sin(\mathbf{B}) \mathbf{A},$$

oder

$$\sin(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{2n+1}\mathbf{A}}{(2n+1)!} = \mathbf{A}^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{B}^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1} \sin(\mathbf{B}) \mathbf{A}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \exp(i\alpha\sigma_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbf{I} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} + i\sigma_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbf{I} \cos(\alpha) + i\sigma_i \sin(\alpha), \end{aligned}$$

mit $(\sigma_i)^2 = \sigma_i\sigma_i = \mathbf{I}$, $(\sigma_i)^3 = \sigma_i$, etc.

$$\begin{aligned} \text{c) } \exp(\mathbf{A}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{E}_i \right)^n \stackrel{(*)}{=} \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^n \underbrace{\mathbf{E}_i^n}_{\mathbf{E}_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \underbrace{\mathbf{E}_i}_{\mathbf{1}} + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_i^n \mathbf{E}_i = \sum_{i=1}^k \exp(\lambda_i) \mathbf{E}_i. \end{aligned}$$

(*) Das gilt, da $E_i E_j = 0$ für $i \neq j$.

d) $\det(e^{\mathbf{A}}) = \det(e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}}) = \det(\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}_D}\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1}) \det(e^{\mathbf{A}_D}) \det(\mathbf{S}) = \det(e^{\mathbf{A}_D})$. Per Konstruktion sind nur Diagonalelemente von \mathbf{A}_D besetzt: $\mathbf{A}_D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}_D} &= \mathbf{1} + \mathbf{A}_D + \frac{1}{2}\mathbf{A}_D^2 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 + \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_2^2 + \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2}\lambda_n^2 + \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \\ \rightarrow \det(e^{\mathbf{A}_D}) &= \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

Das stimmt mit der rechten Seite überein: $e^{\text{Tr}\mathbf{A}} = e^{\text{Tr}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S})} = e^{\text{Tr}\mathbf{A}_D} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}$.

e) Man könnte analog wie oben die Reihendarstellung verwenden:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ (für $-1 < x < 1$), indem man für x die Matrix $x = \mathbf{B} - \mathbf{1}$ einsetzt. (Reihe konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{B} - \mathbf{1}$ vom Betrag kleiner 1 sind).

Einfacher macht man es sich, indem man $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}$ setzt, und die Umkehroperation $\mathbf{B} = \ln \mathbf{A}$ nennt (durch Einsetzen der Reihendarstellungen ineinander sieht man, dass das tatsächlich konsistent ist). Dann folgt:

$$\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{Tr}\mathbf{A}} \rightarrow \det(\mathbf{B}) = e^{\text{Tr}(\ln \mathbf{B})} \stackrel{\ln}{\rightarrow} \ln(\det \mathbf{B}) = \text{Tr}(\ln \mathbf{B}).$$