4. Tutorium **für 8.11.2013**

4.1 Multiple Choice Fragen

a) Kronecker Symbol 1: Berechne δ_{ii} (für einen n-dimensionalen Raum; das Kronecker Symbol ist definiert als $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und 0 sonst; es gilt die Einsteinsche Summenkonvention).
b) Kronecker Symbol 2: Berechne $\delta_{ij}\delta_{ji}$.
c) Levi-Civita-Symbol 1: Berechne $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$. (Siehe Fußnote[1]!)
d) Levi-Civita-Symbol 2: Berechne $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}$.
e) Raumintegral: Berechne für das Volumen V, das vom Tetraeder mit den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ begrenzt wird, mit $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ das Raumintegral $\int_V \mathrm{div}\vec{w} d^3x$.
f) (Fortgesetzt) Flächenintegral: Berechne das Flächenintegral $\int_F \vec{w} \cdot d\vec{f}$ über die Oberfläche des angegebenen Tetraeders.

4.2 Levi-Civita Symbol

Das Epsilon-Symbol (Levi-Civita Symbol) ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten!).
b) Zeige, dass $\varepsilon_{ij\ldots} = -\varepsilon_{ji\ldots}$.
c) Zeige, dass $\varepsilon_{ijk}a_ia_j = 0$.
(Hinweis: Die Indizes lassen sich beliebig umbenennen: $\varepsilon_{ijk}a_ia_j = \varepsilon_{lmk}a_la_m = \varepsilon_{jik}a_ja_i$.)
d) Zeige in Indexschreibweise, dass $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

[1] Alles, was man vorerst über das Levi-Civita-Symbol wissen muss, erfährt man in Beispiel 4.2. (Im Vorlesungsskriptum wird es genauer ab Kapitel 5.12 behandelt. Beachte auch die Literaturangabe in TISS, insbesondere den „Merkzettel zur Indexschreibweise“.) Kommt ein Levi-Civita-Symbol mit drei Indizes vor, so kann von einem dreidimensionalen Raum ausgegangen werden.

e) Zeige in Indexschreibweise, dass für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ in einer dreidimensionalen, orthonormalen Basis mit euklidischer Metrik[2] gilt: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

4.3 Reziprokes Gitter

Gegeben sei ein Kristallgitter mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$. Die Basisvektoren des reziproken Gitters[3] $\vec{b}^1$, $\vec{b}^2$, $\vec{b}^3$ sind einfach die Basisvektoren des Dualraumes $\mathcal{B}^*$, wobei sie (je nach Konvention) mit einem Faktor 2π multipliziert werden. Im Folgenden wird angenommen: $\vec{b}^i = 2\pi\vec{f}^i$.
a) Welcher Zusammenhang gilt zwischen $\vec{f}^i$ und $\vec{f}_j$? Welcher zwischen $\vec{b}^i$ und $\vec{a}_j$? Schreibe die drei Gleichungen, in denen $\vec{b}^2$ vorkommt, auf und erkläre jede davon in Worten.
b) Gib an, wie sich die Basisvektoren des reziproken Gitters $\vec{b}^i$ unter Verwendung von Kreuzprodukt und Skalarprodukt mit Hilfe der in (a) bestimmten Bedingungen aus den Basisvektoren $\vec{a}_j$ berechnen lassen.
c) Das Volumen V der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters ist gegeben durch $V = \vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)$, das des reziproken Gitters durch $V^* = \vec{b}^1\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right)$. Zeige, dass $V^* = \frac{(2\pi)^3}{V}$ gilt.
d) Zeige, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder aus den ursprünglichen Basisvektoren besteht.
e) Gegeben sei eine hexagonale Kristallstruktur mit der Basis $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right\}$. Berechne die Basis des reziproken Gitters wie in (b) angegeben. Skizziere Basis und reziproke Gitterbasis in der x-y-Ebene.
f) Berechne die Basis des reziproken Gitters durch Matrixinversion, also wie in (a) angegeben.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2a-c, 2de, 3a-d, 3ef

[2]Für eine euklidische Metrik mit orthonormalen Basen braucht nicht zwischen unteren und oberen Indizes unterschieden zu werden, da Basisvektoren und duale Basisvektoren zusammen fallen (man kann es aber natürlich weiterhin tun).

[3]Das reziproke Gitter wird in der Kristallographie bei der Beschreibung von Beugung an Kristallen verwendet und wird in „Materialwissenschaften“ und in der „Festkörperphysik“ wieder auftauchen.