4. Tutorium - Lösungen **8.11.2013**

4.1 Multiple Choice Fragen

a) $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \ldots + \delta_{nn} = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$
b) $\delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_{i=1}^n \delta_{ii} = n.$
c) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{iik} = \varepsilon_{11k} + \varepsilon_{22k} + \varepsilon_{33k} = 0 + 0 + 0 = 0.$
d) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\varepsilon_{ijk})^2 = \varepsilon_{123}^2 + \varepsilon_{132}^2 + \varepsilon_{213}^2 + \varepsilon_{231}^2 + \varepsilon_{312}^2 + \varepsilon_{321}^2$
$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6.$
Alternative: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 3 \times 3 - 3 = 6.$

e) $\mathrm{div}\vec{w} = \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 0 = 2.$

$\int_V \mathrm{div}\vec{w} d^3x = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-y} dz\, 2 = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy\, (2 - x - 2y) = \int_0^2 dx\, \left(2y - xy - y^2\right)\Big|_{y=0}^{1-\frac{x}{2}}$
$= \int_0^2 dx \left(2 - x - x + \frac{x^2}{2} - 1 + x - \frac{x^2}{4}\right) = \int_0^2 dx \left(1 - x + \frac{x^2}{4}\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$
Alternative: Volumen eines Tetraeders: $\frac{2\times1\times1}{6} \times 2 = \frac{2}{3}.$

f) $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4.$

$\int_{F_1} \vec{w} \cdot d\vec{f} = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dy(-1) = \int_0^2 dx \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = -x + \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = -1.$

$\int_{F_2} \vec{w} \cdot d\vec{f} = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0} = 0.$

$\int_{F_3} \vec{w} \cdot d\vec{f} = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{y=0} = 0.$

Parametrisierung für 4. Fläche: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$d\vec{f} = \frac{d\vec{x}}{ds} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

$\int_{F_4} \vec{w} \cdot d\vec{f} = \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{x = 2 - 2s - 2t, \\ y = s}} = \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt\, (2 - 2s - 2t + 2s + 2)$
$= \int_0^1 ds \int_0^{1-s} dt\, (4 - 2t) = \int_0^1 ds \left(4(1-s) - (1-s)^2\right) = \int_0^1 \left(3 - 2s - s^2\right) = 3 - 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$
$\int_{F_1+F_2+F_3+F_4} \vec{w} \cdot d\vec{f} = -1 + 0 + 0 + \frac{5}{3} = \frac{2}{3}.$

4.2 Levi-Civita Symbol

a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$
Einsetzen: falls i, j, k und k, l, m jeweils paarweise verschieden sind: In der Summe über k trägt links nur 1 Term bei.
Falls i, j, und k eine gerade Permutation von l, m, k ist ergibt sich $+1$, z.B.:
$i = 1$, $j = 2$, $l = 1$, $m = 2$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1 \cdot 1 = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 1 - 0 = 1.$
Falls i, j, und k eine ungerade Permutation von l, m, k ist ergibt sich -1, z.B.:

$i=1$, $j=2$, $l=2$, $m=1$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1\cdot(-1) = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0-1 = -1$.
(Zyklisches Vertauschen ändert weder links noch rechts etwas am Ergebnis).
Falls i und j ident sind, ergibt sich links 0 und rechts
$\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention).
b) Vertauschung der ersten beiden Indizes vertauscht die Permutation.
Falls $\varepsilon_{ij\ldots} = 0$, dann ist auch $\varepsilon_{ij\ldots} = 0$.
Falls $\varepsilon_{ij\ldots} = \pm 1$, dann ist $\varepsilon_{ji\ldots} = \mp 1$. Also ist die Relation erfüllt.
c) $\varepsilon_{ijk}a_ia_j = \varepsilon_{lmk}a_la_m = \varepsilon_{jik}a_ja_i = -\varepsilon_{ijk}a_ja_i = -\varepsilon_{ijk}a_ia_j \to 2\times\varepsilon_{ijk}a_ia_j = 0$.
Zuerst wurden die Indizes einfach umbenannt, dann die Relation aus Aufgabe b) verwendet, und $a_ja_i = a_ia_j$ vertauscht, da die Reihenfolge von Zahlen egal ist. Zum Schluss wurde auf beiden Seiten $\varepsilon_{ijk}a_ia_j$ addiert.
d) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = a_i\varepsilon_{jki}b_jc_k = b_j\varepsilon_{jki}c_ka_i = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$. (Zyklisches Vertauschen: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$)
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = c_k\varepsilon_{kij}a_ib_j = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = -a_i\varepsilon_{ikj}b_jc_k = -a_i\varepsilon_{ikj}c_kb_j = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$.
$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i\varepsilon_{ijk}b_jc_k = \varepsilon_{ijk}b_jc_ka_i = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$.
e) Es gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_ib_i$, und $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k$. Weiters: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a}$.
$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = a_ib_ia_jb_j + \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{ilm}a_lb_m = a_ib_ia_jb_j + \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)a_jb_ka_lb_m =$
$a_ib_ia_jb_j + a_ja_jb_kb_k - a_jb_ka_kb_j = a_ja_jb_kb_k = (\vec{a}\cdot\vec{a})\left(\vec{b}\cdot\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

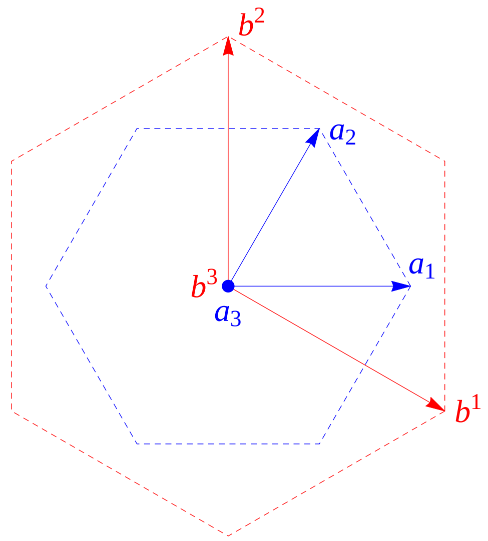
4.3 Reziprokes Gitter

a) $\vec{f}^i\cdot\vec{f}_j = \delta^i_j$.
$\vec{b}^i\cdot\vec{a}_j = \left(2\pi\vec{f}^i\right)\cdot\vec{f}_j = 2\pi\delta^i_j$.
$\vec{b}^2\cdot\vec{a}_1 = 0$, $\vec{b}^2\cdot\vec{a}_3 = 0$. „$\vec{b}^2$ steht normal auf $\vec{a}_1$ und auf $\vec{a}_3$“.
$\vec{b}^2\cdot\vec{a}_2 = 2\pi$. „Das Skalarprodukt zwischen $\vec{b}^2$ und $\vec{a}_1$ muss 2π ergeben“.
b) z.B. $\vec{b}^2$ normal auf $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ $\to \vec{b}^2 = c\,\vec{a}_1\times\vec{a}_3$, mit zu bestimmender Konstante c.
Skalarprodukt ergibt 2π: $\vec{b}^2\cdot\vec{a}_2 = 2\pi$. $\to c\;(\vec{a}_1\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_2 = 2\pi \to c = \frac{2\pi}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_2}$.
$\to \vec{b}^2 = 2\pi\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_3}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_2} = 2\pi\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)\cdot\vec{a}_2}$.
Ähnlich findet man:
$\vec{b}^1 = 2\pi\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_1}$, $\vec{b}^2 = 2\pi\frac{\vec{a}_3\times\vec{a}_1}{(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)\cdot\vec{a}_2}$, $\vec{b}^3 = 2\pi\frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3}$.
c) $V^* = \vec{b}^1\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right) = 2\pi\frac{\vec{a}_2\times\vec{a}_3}{(\vec{a}_2\times\vec{a}_3)\cdot\vec{a}_1}\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right) = \frac{2\pi}{V}\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right)\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right)$
Nebenrechnung: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \varepsilon_{ijk}a_jb_k\varepsilon_{ilm}c_ld_m = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right)a_jb_kc_ld_m$
$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.
$\to V^* = \frac{2\pi}{V}\left(\vec{a}_2\times\vec{a}_3\right)\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right) = \frac{2\pi}{V}\left[\left(\underbrace{\vec{a}_2\cdot\vec{b}^2}_{=2\pi}\right)\left(\underbrace{\vec{a}_3\cdot\vec{b}^3}_{=2\pi}\right) - \left(\underbrace{\vec{a}_2\cdot\vec{b}^3}_{=0}\right)\left(\underbrace{\vec{a}_3\cdot\vec{b}^2}_{=0}\right)\right] = \frac{(2\pi)^3}{V}$.
d) Ein Basisvektor des reziproken Gitters zum reziproken Gitter ist gegeben durch:
$\vec{c}_1 = 2\pi\frac{\vec{b}^2\times\vec{b}^3}{\vec{b}^1\cdot\left(\vec{b}^2\times\vec{b}^3\right)} = 2\pi\frac{\vec{b}^2\times\vec{b}^3}{V^*} = (2\pi)^2\;\frac{(\vec{a}_3\times\vec{a}_1)\times\vec{b}^3}{V^*V}$.
Nebenrechnung: $\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right]_i = \varepsilon_{ijk}\left(\varepsilon_{jlm}a_lb_m\right)c_k = \left(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}\right)a_lb_mc_k = a_kc_kb_i - b_kc_ka_i$
$= \left[(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}\right]_i$
$\to \vec{c}_1 = \frac{(2\pi)^2}{V^*V}\left(\vec{a}_3\times\vec{a}_1\right)\times\vec{b}^3 = \frac{(2\pi)^2}{V^*V}\left[\left(\underbrace{\vec{a}_3\cdot\vec{b}^3}_{=2\pi}\right)\vec{a}_1 - \left(\underbrace{\vec{a}_1\cdot\vec{b}^3}_{=0}\right)\vec{a}_3\right] = \frac{(2\pi)^3}{V^*V}\vec{a}_1 = \vec{a}_1$.
Analog für $\vec{c}_2 = \vec{a}_2$ und $\vec{c}_3 = \vec{a}_3$.
e) $V = \vec{a}_1\cdot(\vec{a}_2\times\vec{a}_3) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2}c \\ -\frac{ac}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a^2c\sqrt{3}}{2}$.

$$\vec{b}^1 = \frac{2\pi}{V}\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{ac\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{ac}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{a} \\ -\frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}^2 = \frac{2\pi}{V}\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}^3 = \frac{2\pi}{V}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{c} \end{pmatrix}.$$



f) $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$

$\vec{b}^i \cdot \vec{a}_j = 2\pi\delta^i_j.$

In Komponenten ausgeschrieben: $\left(\vec{b}^i\right)_c \cdot (\vec{a}_j)^c = 2\pi\delta^i_j.$

Mit $\mathcal{B}_j{}^c := (\vec{a}_j)^c$ und $\mathcal{B}^{*i}{}_c := \left(\vec{b}^i\right)_c$ bzw. $(\mathcal{B}^*)^T_c{}^i = \mathcal{B}^{*i}{}_c$ lässt sich das schreiben als

$\mathcal{B}_j{}^c \, (\mathcal{B}^*)^T_c{}^i = 2\pi\delta^i_j.$

Also, Matrix invertieren, und duale Basisvektoren aus den Zeilen statt Spalten ablesen:

$$2\pi \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = 2\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}. \to \mathcal{B}^* = \left\{\vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{a} \\ -\frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{c} \end{pmatrix} \right\}.$$