5. Tutorium **für 22.11.2013**

5.1 Multiple Choice Fragen

a) Differentialoperatoren 1: Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik): $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi$.
b) Differentialoperatoren 2: Berechne für ein ortsabhängiges Vektorfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$.
c) Differentialoperatoren 3: ∇r mit $r = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ und Ortsvektor $\mathbf{x}$.
d) Differentialoperatoren 4: $\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}\right)$ mit $\mathbf{p}$ konstant und $r = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$.
e) Flächenintegral: Berechne für das Dreieck F, das von den Eckpunkten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ begrenzt wird, mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix}$ das Flächenintegral $\int_F \mathrm{rot}\vec{b}\cdot d\vec{f}$.
f) (Fortgesetzt) Linienintegral: Berechne das Linienintegral $\oint_{\partial F} \vec{b}\cdot d\vec{s}$ entlang des angegebenen Dreiecks und überprüfe damit den Satz von Stokes.

5.2 Transformationsmatrix und metrischer Tensor

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Gegeben seien zwei weitere Basen $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ mit $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ mit $\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) Von einer zur nächsten Basis wird mittels $\mathbf{f}_i = a_i{}^j\mathbf{e}_j$ und $\mathbf{h}_i = \alpha_i{}^j\mathbf{f}_j$ transformiert. Bestimme die Transformationsmatrizen $a_i{}^j$ und $\alpha_i{}^j$ für die angegebenen kovarianten Basisvektoren.
b) Gib für allgemeine Transformationsmatrizen $a_i{}^j$ und $\alpha_i{}^j$ an, wie die kontravarianten Koordinaten (also x^i, x'^i, x''^i) von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ bzw. von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}''$ transformieren. Zeige allgemein, dass $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'^i\mathbf{f}_i = x''^i\mathbf{h}_i$ gilt.

c) Berechne für die gegebenen Basen die Koordinaten x'^i bzw. x''^i mit Hilfe der (transponierten) inversen Transformationsmatrizen $(a^{-1})_j^{\ i}$ bzw. $(\alpha^{-1})_j^{\ i}$.
d) Skizziere den Punkt $\mathbf{x}$ in der Basis $\mathcal{B}'$ und in der Basis $\mathcal{B}''$ und überprüfe, ob die in Punkt (c) erhaltenen Koordinaten mit der Skizze zusammenpassen.
e) Welcher allgemeine Zusammenhang besteht zwischen den kovarianten Basisvektoren $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{h}_i$ und den kontravarianten dualen Basisvektoren $\mathbf{e}^j$, $\mathbf{f}^j$, $\mathbf{h}^j$? Gib für allgemeine Transformationsmatrizen $a_i^{\ j}$ und $\alpha_i^{\ j}$ an, wie sich die dualen Basisvektoren von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{B}^{*\prime}$ bzw. von $\mathcal{B}^{*\prime}$ nach $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$ transformieren. Zeige allgemein, dass $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j$ gilt.
f) Berechne die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^i$ und $\mathbf{h}^i$ mittels der Transformationsmatrizen $a_i^{\ j}$ und $\alpha_i^{\ j}$.
g) Wie transformieren die kovarianten Koordinaten von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{B}^{*\prime}$ bzw. von $\mathcal{B}^{*\prime}$ nach $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$? Berechne x'_i bzw. x''_i mit Hilfe geeigneter Transformationsmatrizen.
h) Skizziere den Punkt $\mathbf{x}$ in den dualen Basen $\mathcal{B}^{*\prime}$ und $\mathcal{B}^{*\prime\prime}$.
i) Wie berechnet man den metrischen Tensor g_{ij}? Berechne g_{ij}, g'_{ij} und g''_{ij} für die Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}''$.
j) Berechne die Längen $\sqrt{x^i g_{ij} x^j}$, $\sqrt{x'^i g'_{ij} x'^j}$ und $\sqrt{x''^i g''_{ij} x''^j}$ und vergleiche mit der Skizze.
k) Berechne die Längen $\sqrt{x^i x_i}$, $\sqrt{x'^i x'_i}$, und $\sqrt{x''^i x''_i}$.

5.3 Transformation von Differentialoperatoren

Polarkoordinaten $x'^1 = r$, $x'^2 = \varphi$ sind definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = x^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x^1(r,\varphi) \\ x^2(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Berechne die lokale, infinitesimale[1] Transformationsmatrix $a_i^{\ j}$ von kartesischen Koordinaten in die Polarkoordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen (nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$.
b) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal?
c) Berechne die inverse Transformationsmatrix $a'_i{}^{j}$, und stelle mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i = (0,1)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dar.

[1] Obwohl zwischen $x^i = (x,y)^T$ und $x'^i = (r,\varphi)^T$ global kein linearer Zusammenhang besteht, kann man lokal (ortsabhängig) und infinitesimal (also für die Richtungen) einen linearen Zusammenhang angeben: $dx^j(\mathbf{x}) = a_i^{\ j}(\mathbf{x}) dx'^i(\mathbf{x})$.

d) Skizziere die drei Koordinatenlinien $r = 1$, $r = 2$, sowie $\varphi = 1$ graphisch in ein x-y-Diagramm. Zeichne für folgende Punkte die Basisvektoren $\mathbf{e}_1'$ und $\mathbf{e}_2'$ ein: $(r, \varphi)^T = (1, 0)^T$, $(1, 1)^T$ und $(2, 1)^T$. Zeichne den Vektor $\mathbf{v}$ an diesen Punkten ein, und prüfe, ob die Zerlegung in die Basis $\mathcal{B}'$ für diese Punkte stimmt.

Ankreuzbar: 1a-d, 1ef, 2a-d, 2e-h, 2i-k, 3a-d