

5. Tutorium - Lösungen

22.11.2013

5.1 Multiple Choice Fragen

a) $\text{rot grad } \varphi \rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}} \underbrace{\partial_j \partial_k}_{\text{symmetrisch}} \varphi = 0.$

b) $\text{rot rot } \mathbf{v} \rightarrow \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l v_m = \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm}}_{\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}} \partial_j \partial_l v_m = \underbrace{\partial_j \partial_i v_j}_{\partial_i \partial_j v_j} - \partial_j \partial_j v_i \rightarrow \text{grad div } \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v}.$

c) $\nabla r \rightarrow \partial_i r = \partial_i \sqrt{x_j x_j} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x_j x_j}} \left[\underbrace{(\partial_i x_j)}_{\delta_{ij}} x_j + x_j \underbrace{(\partial_i x_j)}_{\delta_{ij}} \right] = \frac{2 \delta_{ij} x_j}{2r} = \frac{x_i}{r} \rightarrow \frac{\mathbf{x}}{r}.$

d) $\nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^5} \right) \rightarrow \partial_i \left(\frac{p_j x_j}{r^5} \right) = p_j \underbrace{\frac{1}{r^5}}_{\delta_{ij}} (\partial_i x_j) + p_j x_j \underbrace{\left(\partial_i \frac{1}{r^5} \right)}_{-\frac{5}{r^6} \partial_i r} = p_j \frac{1}{r^5} \delta_{ij} - p_j x_j \frac{5}{r^6} \frac{x_i}{r} = \frac{p_i}{r^5} - \frac{5 x_i p_j x_j}{r^7} \rightarrow \frac{\mathbf{p}}{r^5} - \frac{5 \mathbf{x}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}{r^7}.$

e) $\text{rot } \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Dreieck parametrisieren: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Flächenelement: $d\vec{f} = \frac{d\vec{x}}{ds} \times \frac{d\vec{x}}{dt} ds dt = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} ds dt = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} ds dt$

$\int_F \text{rot } \vec{b} \cdot d\vec{f} = \int_0^1 ds \int_0^s dt \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \int_0^1 ds \int_0^s dt = 2 \int_0^1 ds = 2.$

f) $\partial F = C = C_1 + C_2 + C_3.$

$C_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_1} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -2s \\ 1-s \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 (2s + 2 - 2s) ds = 2.$

$C_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_2} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} -(2-2s) \\ 0 \\ 3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 9s ds = \frac{9}{2}.$

$C_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, d\vec{s} = d\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ds.$

$\int_{C_3} \vec{b} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 3-3s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} ds = \int_0^1 (-9 + 9s) ds = -9s + 9 \frac{s^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{9}{2}.$

$\int_{C_1+C_2+C_3} \vec{b} \cdot d\vec{s} = 2 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 2.$

5.2 Transformationsmatrix und metrischer Tensor

a) $\mathbf{f}_i = a_i^j \mathbf{e}_j$ bzw. in Komponenten $(f_i)^b = a_i^j (e_j)^b$ kann man in Matrixschreibweise wie folgt umschreiben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f_1)^1 & (f_1)^2 \\ (f_2)^1 & (f_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e_1)^1 & (e_1)^2 \\ (e_2)^1 & (e_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{0 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

(Anmerkung: Wenn man die Basisvektoren als Spaltenvektoren in die Matrix schreiben möchte, kann man schreiben $(f_j)^b = f_j^{(b)}$, damit weiterhin der erste Index die Zeile und der zweite die Spalte beschreibt. Damit Indizes, über die summiert wird, nebeneinander stehen, muss die Transformationsmatrix a transponiert werden: $a_i^j = (a^T)^j_i$. Somit hat man $f_j^{(b)} = e_j^{(b)} (a^T)^j_i$, was man wie folgt umschreiben kann:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{f_1^{(1)}} & \boxed{f_2^{(1)}} \\ \boxed{f_1^{(2)}} & \boxed{f_2^{(2)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{e_1^{(1)}} & \boxed{e_2^{(1)}} \\ \boxed{e_1^{(2)}} & \boxed{e_2^{(2)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a^T)^1_1 & (a^T)^1_2 \\ (a^T)^2_1 & (a^T)^2_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Also von links nach rechts ist der erste Index stets die Zeile und der zweite Index die Spalte, und über nebeneinanderstehende Indizes wird summiert.)

Ähnlich erhält man die Transformationsmatrix α von \mathcal{B}' nach \mathcal{B}'' :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_1)^1 & (h_1)^2 \\ (h_2)^1 & (h_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f_1)^1 & (f_1)^2 \\ (f_2)^1 & (f_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix}.$$

Hier muss man noch von rechts mit der Inversen der letzten Matrix multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1} \\ \boxed{-1 \quad 1} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Somit folgt:}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0} \\ \boxed{1 \quad 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $x'^i = (a^{-1})^i_j x^j$ und $x''^i = (\alpha^{-1})^i_j x'^j$.

Damit gilt: $x''^i \mathbf{h}_i = (\alpha^{-1})^i_j x'^j \alpha_i^k \mathbf{f}_k = \underbrace{(\alpha^{-1})^i_j \alpha_i^k}_{\delta_j^k} x'^j \mathbf{f}_k = x'^j \mathbf{f}_j$.

$$x'^j \mathbf{f}_j = (a^{-1})^j_k x^k a_j^l \mathbf{e}_l = \underbrace{(a^{-1})^j_k a_j^l}_{\delta_k^l} x^k \mathbf{e}_l = x^k \mathbf{f}_k.$$

c)

Für die Transformation $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ gilt: $x'^i = (a^{-1})^i_j x^j$. In Matrixschreibweise:

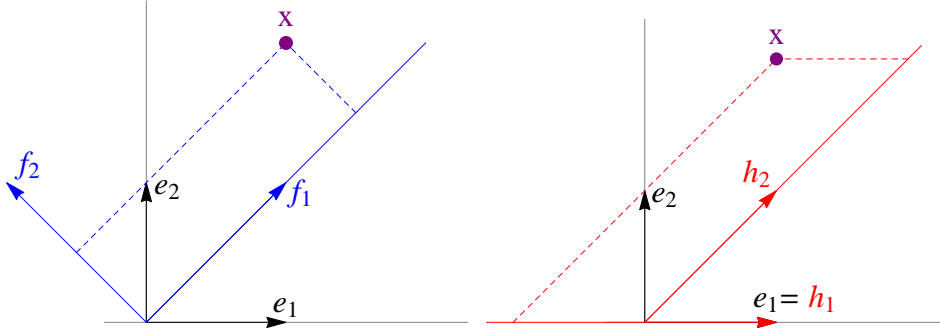
$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^{-1})^1_1 & (a^{-1})^1_2 \\ (a^{-1})^2_1 & (a^{-1})^2_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \\ = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Für die Transformation $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}''$ gilt: $x''^i = (\alpha^{-1})^i_j x'^j$. In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^{-1})^1_1 & (\alpha^{-1})^1_2 \\ (\alpha^{-1})^2_1 & (\alpha^{-1})^2_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d)



e) $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^j$, $\mathbf{f}^j \cdot \mathbf{f}_i = \delta_i^j$, $\mathbf{h}^j \cdot \mathbf{h}_i = \delta_i^j$.

$$\mathbf{f}^i = (a^{-1})_j^i \mathbf{e}^j, \mathbf{h}^i = (\alpha^{-1})_j^i \mathbf{f}^j.$$

$$\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_j = (\alpha^{-1})_k^i \mathbf{f}^k \cdot \alpha_j^l \mathbf{f}_l = (\alpha^{-1})_k^i \underbrace{\alpha_j^l \mathbf{f}^k \cdot \mathbf{f}_l}_{\delta_l^k} = (\alpha^{-1})_k^i \alpha_j^k = \alpha_j^k (\alpha^{-1})_k^i = \delta_j^i.$$

$$\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = (a^{-1})_k^i \mathbf{e}^k \cdot a_j^l \mathbf{e}_l = (a^{-1})_k^i \underbrace{a_j^l \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_l}_{\delta_l^k} = (a^{-1})_k^i a_j^k = a_j^k (a^{-1})_k^i = \delta_j^i.$$

f) $\mathbf{f}^i = (a^{-1})_j^i \mathbf{e}^j$. bzw. $(f^i)_b = (a^{-1})_j^i (e^j)_b$

bzw. damit gleiche Indizes nebeneinander stehen: $(f^i)_b = ([a^{-1}]^T)_j^i (e^j)_b$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (f^1)_1 & (f^1)_2 \\ (f^2)_1 & (f^2)_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} (a^{-1})_1^1 & (a^{-1})_1^2 \\ (a^{-1})_2^1 & (a^{-1})_2^2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} (e^1)_1 & (e^1)_2 \\ (e^2)_1 & (e^2)_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^{-1})_1^1 & (a^{-1})_2^1 \\ (a^{-1})_1^2 & (a^{-1})_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Und für die zweite Basistransformation:

$$\mathbf{h}^i = (\alpha^{-1})_j^i \mathbf{f}^j. \text{ bzw. } (h^i)_b = (\alpha^{-1})_j^i (f^j)_b$$

bzw. damit gleiche Indizes nebeneinander stehen: $(h^i)_b = ([\alpha^{-1}]^T)_j^i (f^j)_b$.

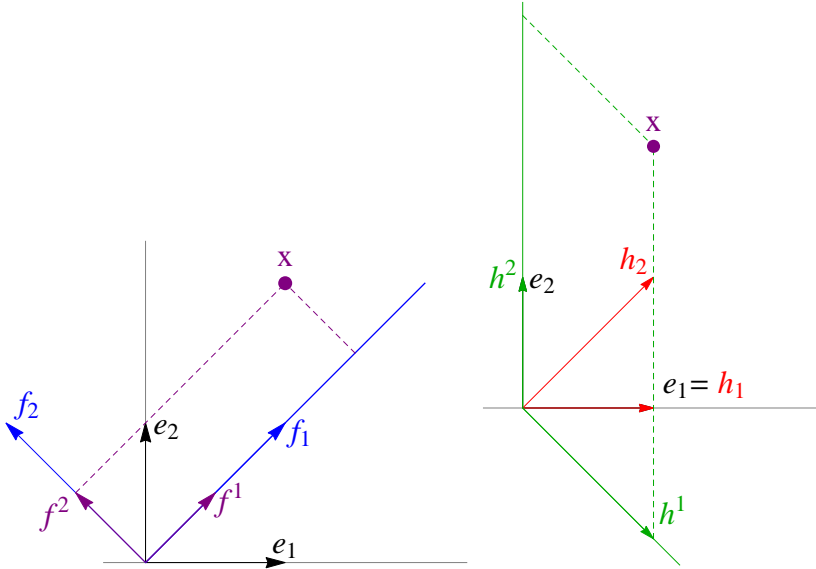
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (h^1)_1 & (h^1)_2 \\ (h^2)_1 & (h^2)_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} (\alpha^{-1})_1^1 & (\alpha^{-1})_1^2 \\ (\alpha^{-1})_2^1 & (\alpha^{-1})_2^2 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} (f^1)_1 & (f^1)_2 \\ (f^2)_1 & (f^2)_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha^{-1})_1^1 & (\alpha^{-1})_2^1 \\ (\alpha^{-1})_1^2 & (\alpha^{-1})_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

g) $x'_i = a_i^j x_j$, $x''_i = \alpha_i^j x'_j$.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

h)



i) $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$.

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$g'_{ij} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$.

$$\begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

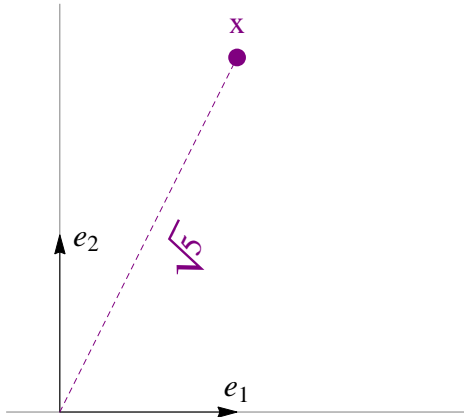
$g''_{ij} = \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j$.

$$\begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12} \\ g''_{21} & g''_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

j) $\sqrt{x^i g_{ij} x^j} = \sqrt{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}.$

$$\begin{aligned} \sqrt{x'^i g'_{ij} x'^j} &= \sqrt{\begin{pmatrix} x'^1 & x'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x''^i g''_{ij} x''^j} &= \sqrt{\begin{pmatrix} x''^1 & x''^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''_{11} & g''_{12} \\ g''_{21} & g''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''^1 \\ x''^2 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{-1+6} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{k) } \sqrt{x^i x_i} &= \sqrt{\begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}. \\
 \sqrt{x'^i x'_i} &= \sqrt{\begin{pmatrix} x'^1 & x'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}. \\
 \sqrt{x''^i x''_i} &= \sqrt{\begin{pmatrix} x''^1 & x''^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} = \sqrt{-1+6} = \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

5.3 Transformation von Differentialoperatoren

a) Transformationsmatrix für kovariante Komponenten: $a_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(r \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Basisvektoren: $\mathbf{e}'_i = a_i^j \mathbf{e}_j$.

$$\rightarrow \mathbf{e}'_1 = a_1^1 \mathbf{e}_1 + a_1^2 \mathbf{e}_2 = \cos \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_2^1 \mathbf{e}_1 + a_2^2 \mathbf{e}_2 = -r \sin \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned}
 g'_{ij} &= \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \rightarrow \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & \cos \varphi (-r \sin \varphi) + \sin \varphi r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \cos \varphi + r \cos \varphi \sin \varphi & r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

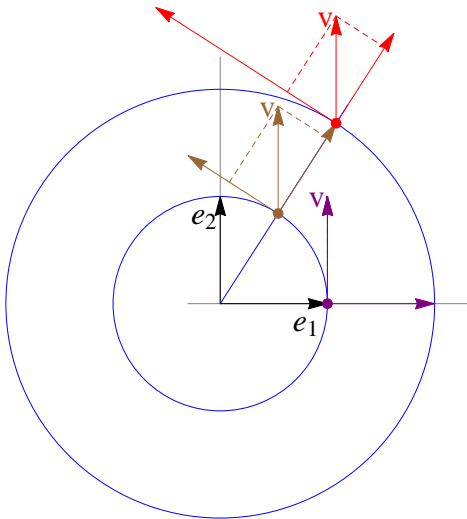
Orthogonal, da nur Diagonalelemente besetzt sind. (Für $r = 0$ ist Metrik singulär, da Determinante verschwindet \leftrightarrow nicht invertierbar.)

c) Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten: $a' = a^{-1}$. Invertieren von a :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \cos \varphi & \sin \varphi & 1 & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} & \frac{1}{\cos \varphi} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \varphi \sin \varphi} & \frac{1}{\cos \varphi} & \frac{1}{r \sin \varphi} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ 0 & 1 & \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{array} \right).$$

$$\text{Transformation: } v'^j = a'^j_i v^i = (a'^T)^j_i v^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

d)



Basisvektoren kartesisch: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $v^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

In Polarkoordinaten, z.B. an der Stelle $x'^i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $x^i = \begin{pmatrix} 2 \cos 1 \\ 2 \sin 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,08 \\ 1,68 \end{pmatrix}$

$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 1 \\ \sin 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin 1 \\ 2 \cos 1 \end{pmatrix} \right\} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 0,54 \\ 0,84 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1,86 \\ 1,08 \end{pmatrix} \right\}$; $v'^i = \begin{pmatrix} \sin 1 \\ \frac{1}{2} \cos 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,84 \\ 0,27 \end{pmatrix}$.