6. Tutorium **für 29.11.2013**

6.1 Multiple Choice Fragen

a) Distributionen 1: Vereinfache $\delta(z^2-1)$.
b) Distributionen 2: Vereinfache $\delta(t^2+t)$.
c) Differentialoperatoren 1: Vereinfache $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^5}\right)$ mit $r=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).
d) Differentialoperatoren 2: Vereinfache $\operatorname{rot}(\mathbf{E}\times\mathbf{x})$, wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor und $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ein Vektorfeld ist (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik).
e) Tensoren 1: Berechne $g^{ij}B_{ij}$ mit $B_{ij}=A_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k$ für eine nicht-orthogonale, dreidimensionale Metrik.
f) Tensoren 2: Berechne $B^{ij}B^{mn}\left(g_{im}g_{jn}-g_{in}g_{jm}\right)$ mit $B_{ij}=A_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k$ für eine nicht-orthogonale, dreidimensionale Metrik.

6.2 Distributionen und Delta-Folgen

a) Überprüfe durch Anwenden auf eine Testfunktion, ob die folgenden Folge $\{f_n\}$ eine Deltafolge für $n\to\infty$ bzw. $\varepsilon\to 0$ ist: $f_n(x)=\sqrt{n}e^{-n\pi x^2}$.
b) Überprüfe, ob folgende Folge eine Deltafolge ist:

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon}-\frac{|x|}{\varepsilon^2} & \text{für } -\varepsilon<x<\varepsilon,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

c) Berechne

$$F(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax+b)\varphi(x)dx$$

für $a>0$ durch geeignete Variablensubstitution von x. Welche Bedingungen muss die Testfunktion φ erfüllen?
d) Berechne $F(\varphi)$ für $a<0$ durch Variablensubstitution.
e) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-4\right)e^x dx.$$

f) $I=\int_{-\infty}^{2}dx\int_{-\infty}^{\infty}dy\,\delta(2y^2+4x-30)\delta(x+y)f(x,y)$.
g)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-R\right)d^3x.$$

6.3 Maxwell-Gleichungen

a) Schreibe die Maxwellgleichungen und die Lorentzkraftdichte (in CGS Einheiten und mit $c = 1$) in Indexschreibweise:
$\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho, \qquad \text{div}\mathbf{B} = 0, \qquad \text{rot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}, \qquad \text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B},$
$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$
b) Berechne aus der dritten Gleichung die Divergenz des Stromes $\mathbf{j}$ in Indexschreibweise und zeige, dass dies auf die Kontinuitätsgleichung führt.
c) Zeige in Indexschreibweise, dass $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\text{grad}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$ die zweite und die vierte Maxwellgleichung lösen.

6.4 Transformation von Differentialoperatoren (Fortsetzung von Beispiel 5.3)

a) Berechne den Gradient in Polarkoordinaten[1].
Hinweis: Der Gradient soll sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten den gleichen Vektor ergeben:

$$\begin{aligned} \nabla\phi(x,y) &= (\partial_x\phi(x,y))\,\mathbf{e}^x + (\partial_y\phi(x,y))\,\mathbf{e}^y \\ &= (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^r + (?..?\phi(r,\varphi))\,\mathbf{e}^\varphi. \end{aligned}$$

Um von der ersten zur zweiten Zeile zu gelangen, kann einerseits die alte durch die neue Basis ausgedrückt werden ($\mathbf{e}^x = ...\mathbf{e}^r + ...\mathbf{e}^\varphi$), und andererseits die verallgemeinerte Kettenregel angewendet werden ($\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varphi}$).

Nicht-orthogonale Parabelkoordinaten

Eine Koordinatentransformation von (x,y) nach (r,φ) sei durch folgende Parametrisierung gegeben, die Parabeln beschreibt:

$$\mathbf{x}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \\ r\varphi \end{pmatrix}.$$

(Für kleine Winkel $|\varphi| \ll 1$ ist das eine Näherung an die Polarkoordinaten mit Fehler $O(\varphi^3)$.)
b) Berechne die lokale, infinitesimale Transformationsmatrix $a_i^{\ j}$ von kartesischen Koordinaten in die Polarkoordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen

[1] Beachte beim Vergleich des Endergebnisses mit der Literatur, dass dort meist normierte (d.h. Einheits-)Basisvektoren verwendet werden, z.B. auf http://de.wikipedia.org/wiki/Polarkoordinaten#Gradient .

(nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$[2].
c) Berechne den metrischen Tensor g'_{ij} mit Hilfe der Basisvektoren $\mathbf{e}'_i$. Sind die neuen Koordinaten überall orthogonal?
d) Berechne die inverse Transformationsmatrix ${a'}_i^{\ j}$, und stelle mit deren Hilfe den Vektor $\mathbf{v}$ mit kartesischen Komponenten $v^i = (0,1)^T$ in dem Koordinatesystem $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ dar.
e) Skizziere die drei Koordinatenlinien $r = 1$, $r = 2$, sowie $\varphi = 1$ graphisch in ein x-y-Diagramm. Zeichne für folgende Punkte die Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ein: $(r, \varphi)^T = (1, 0)^T$, $(1, 1)^T$ und $(2, 1)^T$. Zeichne den Vektor $\mathbf{v}$ an diesen Punkten ein, und prüfe, ob die Zerlegung in die Basis $\mathcal{B}'$ für diese Punkte stimmt.
f) Berechne den Gradient in Polarkoordinaten.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-d, 2e-g, 3a-c, 4a-f

[2] Zwischenergebnis zur Überprüfung: Die invertierte Transformationsmatrix lautet $a^{-1} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}$.