6. Tutorium - Lösungen **29.11.2013**

6.1 Multiple Choice Fragen

a) $\delta(z^2-1) = \delta((z+1)(z-1)) = \frac{\delta(z+1)}{|2z|} + \frac{\delta(z-1)}{|2z|} = \frac{1}{2}[\delta(z+1)+\delta(z-1)]$. (Ableitung $f(x) = z^2-1$; $f'(x) = 2z$)

b) $\delta(t^2+t) = \delta(t(t+1)) = \frac{\delta(t)}{|2t+1|} + \frac{\delta(t+1)}{|2t+1|} = \delta(t)+\delta(t+1)$. (Ableitung $f(x) = t^2+t$; $f'(x) = 2t+1$)

c) $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^5}\right) \to \partial_i\left(\frac{x_i}{r^5}\right) = \frac{1}{r^5}\underbrace{\left(\partial_i x_i\right)}_{\delta_{ii}=3} + x_i\left(\partial_i \frac{1}{r^5}\right) = \frac{1}{r^5}3 - x_i 5\frac{1}{r^6}\left(\partial_i r\right) = \frac{3}{r^5} - x_i\frac{5}{r^6}\frac{x_i}{r} = -\frac{2}{r^5}$ (mit $x_i x_i = r^2$).

d) $\text{rot}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{x}) \to \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}E_l x_m\right) = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}} \underbrace{\partial_j\left(E_l x_m\right)}_{(\partial_j E_l)x_m + E_l\underbrace{(\partial_j x_m)}_{\delta_{jm}}} = \left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\left[\left(\partial_j E_l\right)x_m + E_l\delta_{jm}\right]$

$= \delta_{il}\delta_{jm}\left(\partial_j E_l\right)x_m + \delta_{il}\delta_{jm}E_l\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\left(\partial_j E_l\right)x_m - \delta_{im}\delta_{jl}E_l\delta_{jm} = x_j\left(\partial_j E_i\right) + \underbrace{\delta_{jj}}_{3}E_i - \left(\partial_j E_j\right)x_i - E_i$

$= x_j\left(\partial_j E_i\right) - x_i\left(\partial_j E_j\right) + 2E_i \to \left(\mathbf{x}\cdot\nabla\right)\mathbf{E} - \mathbf{x}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right) + 2\mathbf{E}$

e) $g^{ij}B_{ij} = g^{ij}\left(A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^k{}_k\right) = A^i{}_i - \frac{1}{2}\underbrace{\delta^i_i}_{3}A^k{}_k = -\frac{1}{2}A^i{}_i$.

f) $B^{ij}B_{ij} = \left(A^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}A^k{}_k\right)\left(A_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}A^m{}_m\right) = A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{2}A^i{}_iA^k{}_k - \frac{1}{2}A^i{}_iA^m{}_m + \frac{1}{4}\underbrace{\delta^i_i}_{3}A^k{}_kA^m{}_m = A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2$.

$B^{ij}B^{mn}\left(g_{im}g_{jn} - g_{in}g_{jm}\right) = B^{ij}B_{ij} - B^{ij}B_{ji} = \left[A^{ij}A_{ij} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2\right] - \left[A^{ij}A_{ji} - \frac{1}{4}\left(A^k{}_k\right)^2\right] = A^{ij}A_{ij} - A^{ij}A_{ji}$.

6.2 Distributionen und Delta-Folgen

a) Ja. Folge auf Testfunktion anwenden:

$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}e^{-n\pi x^2}\varphi(x)dx = \left|\begin{array}{c} u = \sqrt{n\pi}x \\ du = \sqrt{n\pi}dx \end{array}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n\pi}}\right)du \to \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}\varphi(0)du = \varphi(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du = \varphi(0)$.

b) Ja: $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{|x|}{\varepsilon^2}\right)\varphi(x)dx$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\varepsilon}^{0}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{x}{\varepsilon^2}\right)\varphi(x)dx + \int_0^{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{x}{\varepsilon^2}\right)\varphi(x)dx\right] = \left|\begin{array}{c} x = \varepsilon u \\ dx = \varepsilon du \end{array}\right|$

$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{0}(1+u)\,\varphi(\varepsilon u)du + \int_0^1(1-u)\,\varphi(\varepsilon u)du\right]$

$= \int_{-1}^{0}(1+u)\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon u)}_{\varphi(0)}du + \int_0^1(1-u)\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon u)}_{\varphi(0)}du$

$= \varphi(0)\left[\int_{-1}^{0}(1+u)\,du + \int_0^1(1-u)\,du\right] = \varphi(0)\left[\left(u + \frac{u^2}{2}\Big|_{-1}^{0}\right) + \left(u - \frac{u^2}{2}\Big|_0^1\right)\right]$

$= \varphi(0)\left[0 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 1\right] = \varphi(0)$.

c) $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax+b)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{a}dy = \frac{1}{a}\varphi\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Variablensubstitution $ax+b = y$, $a\,dx = dy$, $dx = \frac{1}{a}dy$. Integrationsgrenzen bleiben für $a > 0$ gleich: $-\infty$ bis $+\infty$.

Testfunktion φ: Für beliebige Distributionen sollte eine Testfunktion idealer Weise einen kompakten Träger haben (daher insbesondere im Unendlichen verschwinden) und beliebig oft differenzierbar sein (Testfunktio-

nen der Klasse I). Für hinreichend konzentrierte Distributionen (wie die Dirac Delta-Distribution) genügt aber, dass die Testfunktion beliebig oft differenzierbar ist (Testfunktionen der Klasse IV).
d) Für $a<0$ ändern sich Integrationsgrenzen:
$F(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(ax+b)\varphi(x)dx=\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy=-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)\varphi(\frac{y-b}{a})\frac{1}{a}dy=-\frac{1}{a}\varphi(-\frac{b}{a})$.
e) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x^2-4\right)e^x dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{|4|}\delta\left(x-2\right)+\frac{1}{|-4|}\delta\left(x+2\right)\right]e^x dx=\frac{1}{4}\left(e^2+e^{-2}\right)=\frac{1}{2}\cosh(2)$.
Dabei wurde $f(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$ und $f'(x)=2x$ verwendet.
f) Integral über y: $y=-x$:
$I=\int_{-\infty}^{2}dx\delta(2x^2+4x-30)f(x,-x)=\int_{-\infty}^{2}dx\delta\left(2\left(x-3\right)\left(x+5\right)\right)f(x,-x)$
Ableitung des Integranden: $4x+4$.
$I=\theta(2-x)\frac{f(x,-x)}{|4x+4|}\Big|_{x=3}+\theta(2-x)\frac{f(x,-x)}{|4x+4|}\Big|_{x=-5}$
Nur Lösung $x=-5<2$ trägt bei.
$I=\frac{f(-5,5)}{16}=\frac{1}{16}\left[f(-5,5)\right]$.
g) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-R)\,d^3x=\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\infty}r^2dr\delta(r-R)=4\pi R^2$.
Die Lösung beschreibt den Flächeninhalt einer Kugelschale.

6.3 Maxwell-Gleichungen

a) $\nabla_i E_i=4\pi\rho$,
$\nabla_i B_i=0$,
$\varepsilon_{klm}\nabla_l B_m=4\pi j_k+\frac{\partial}{\partial t}E_k$,
$\varepsilon_{klm}\nabla_l E_m=-\frac{\partial}{\partial t}B_k$,
$f_k=\rho E_k+\varepsilon_{klm}j_l B_m$.
b) $\text{div}\mathbf{j}=\text{div}\left(\frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\right)$
$\to\nabla_k j_k=\nabla_k\left(\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{klm}\nabla_l B_m-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}E_k\right)$
$=\frac{1}{4\pi}\underbrace{\varepsilon_{klm}\nabla_k\nabla_l}_{=0}B_m-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\nabla_k E_k}_{4\pi\rho}$
$=-\frac{\partial}{\partial t}\rho$.
Also, Kontinuitätsgleichung: $\text{div}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial t}\rho=0$.
c) $\text{div}\mathbf{B}=0\to\nabla_i B_i=0$.
$\to\nabla_i\left(\varepsilon_{ikm}\nabla_k A_m\right)=\underbrace{\varepsilon_{ikm}\nabla_i\nabla_k}_{=0}A_m=0$. Ok.
$\text{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\to\varepsilon_{klm}\nabla_l E_m=-\frac{\partial}{\partial t}B_k$
$\to\varepsilon_{klm}\nabla_l\left(-\nabla_m\phi-\frac{\partial}{\partial t}A_m\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_{klm}\nabla_l A_m\right)$
$\to-\underbrace{\varepsilon_{klm}\nabla_l\nabla_m}_{=0}\phi-\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_l A_m=-\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial t}\nabla_l A_m$. Ok.

6.4 Transformation von Differentialoperatoren

a) $\mathbf{e}^j=a_i^{\ j}\mathbf{e}'^i=\left(a^T\right)^j_{\ i}\mathbf{e}'^i$.

$$\to\begin{pmatrix}\mathbf{e}^x\\ \mathbf{e}^y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{e}^r\\ \mathbf{e}^\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\mathbf{e}^r-r\sin\varphi\mathbf{e}^\varphi\\ \sin\varphi\mathbf{e}^r+r\cos\varphi\mathbf{e}^\varphi\end{pmatrix}.$$

Die Ableitung transformiert genau wie die Basisvektoren mit a' zurück:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}=a'^{\ j}_{i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\quad\to\quad\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\frac{1}{r}\sin\varphi\\ \sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_r\\ \partial_\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\partial_r-\frac{1}{r}\sin\varphi\partial_\varphi\\ \sin\varphi\partial_r+\frac{1}{r}\cos\varphi\partial_\varphi\end{pmatrix}.$$

Kombiniert ergibt das:
$\nabla\phi(x,y)=\left(\partial_x\phi(x,y)\right)\mathbf{e}^x+\left(\partial_y\phi(x,y)\right)\mathbf{e}^y=$
$=\left(\cos\varphi\partial_r\phi(r,\varphi)-\frac{1}{r}\sin\varphi\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\left(\cos\varphi\mathbf{e}^r-r\sin\varphi\mathbf{e}^\varphi\right)+\left(\sin\varphi\partial_r\phi(r,\varphi)+\frac{1}{r}\cos\varphi\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\left(\sin\varphi\mathbf{e}^r+r\cos\varphi\mathbf{e}^\varphi\right)$

$$= \left(\cos^2\varphi\,\partial_r\phi - \tfrac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\,\partial_\varphi\phi + \sin^2\varphi\,\partial_r\phi + \tfrac{1}{r}\cos\varphi\sin\varphi\,\partial_\varphi\phi\right)\mathbf{e}^r + \left(0\times\partial_r\phi + \sin^2\varphi\,\partial_\varphi\phi + \cos^2\varphi\,\partial_\varphi\phi\right)\mathbf{e}^\varphi$$
$$= \left(\partial_r\phi(r,\varphi)\right)\mathbf{e}^r + \left(\partial_\varphi\phi(r,\varphi)\right)\mathbf{e}^\varphi .$$

Nicht-orthogonale Parabelkoordinaten

b) Transformationsmatrix für kovariante Komponenten: $a_i^{\ j} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \to$

$$\begin{pmatrix} a_1^{\ 1} & a_1^{\ 2} \\ a_2^{\ 1} & a_2^{\ 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\left(r\left(1-\varphi^2/2\right)\right)}{\partial r} & \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial\left(r\left(1-\varphi^2/2\right)\right)}{\partial \varphi} & \frac{\partial(r\varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi^2}{2} & \varphi \\ -r\varphi & r \end{pmatrix}.$$

Basisvektoren: $\mathbf{e}'_i = a_i^{\ j}\mathbf{e}_j$.

$\to \mathbf{e}'_1 = a_1^{\ 1}\mathbf{e}_1 + a_1^{\ 2}\mathbf{e}_2 = \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\varphi^2}{2} \\ \varphi \end{pmatrix}$.

$\mathbf{e}'_2 = a_2^{\ 1}\mathbf{e}_1 + a_2^{\ 2}\mathbf{e}_2 = -r\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\varphi \\ r \end{pmatrix}$.

c)

$$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i\cdot\mathbf{e}'_j \to \begin{pmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{21} & g'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2\cdot\mathbf{e}'_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)^2 + \varphi^2 & \left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right)(-r\varphi) + \varphi r \\ -r\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) + r\varphi & r^2\varphi^2 + r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\varphi^4}{4} & r\frac{\varphi^3}{2} \\ r\frac{\varphi^3}{2} & r^2\left(1+\varphi^2\right) \end{pmatrix}.$$

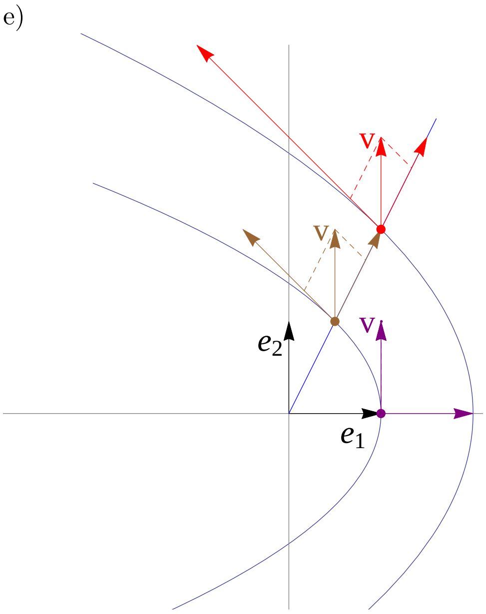
Nicht-orthogonal, da nicht nur Diagonalelemente besetzt sind. (Orthogonal nur für $\varphi = 0$, $r > 0$. Für $r = 0$ ist Metrik singulär.)

d) Transformationsmatrix für kontravariante Komponenten: $a' = a^{-1}$. Invertieren von a:

$$a^{-1} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Transformation: $v'^j = a'_i{}^{j} v^i = \left(a'^T\right)^j_{\ i} v^i = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\frac{\varphi}{r} & \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}}\begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{1}{r}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix}$.

e)



f) $\mathbf{e}^j = a_i^{\ j} \mathbf{e}'^i = \left(a^T\right)^j_{\ i} \mathbf{e}'^i$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{e}^x \\ \mathbf{e}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\varphi^2}{2} & -r\varphi \\ \varphi & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^r \\ \mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \mathbf{e}^r - r\varphi \mathbf{e}^\varphi \\ \varphi \mathbf{e}^r + r\mathbf{e}^\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Ableitung transformiert genau wie die Basisvektoren mit a' zurück:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = a'^{\ j}_{i} \frac{\partial}{\partial x^j} \rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\varphi}{r} \\ \varphi & \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2}{2}} \begin{pmatrix} \partial_r - \frac{\varphi}{r}\partial_\varphi \\ \varphi\partial_r + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi \end{pmatrix}.$$

Kombiniert ergibt das:
$\nabla\phi(x, y) = \left[\mathbf{e}^x \partial_x + \mathbf{e}^y \partial_y\right] \phi(x, y) =$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \left[\left(\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \mathbf{e}^r - r\varphi\mathbf{e}^\varphi\right) \left(\partial_r - \frac{\varphi}{r}\partial_\varphi\right) + \left(\varphi\mathbf{e}^r + r\mathbf{e}^\varphi\right) \left(\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right] \phi(r, \varphi)$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \left[\mathbf{e}^r \left(\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_r - \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\frac{\varphi}{r}\partial_\varphi + \varphi^2\partial_r + \frac{\varphi}{r}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right.$
$\left. + \mathbf{e}^\varphi \left(-r\varphi\partial_r + \varphi^2\partial_\varphi + r\varphi\partial_r + \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right] \phi(r, \varphi)$
$= \frac{1}{1+\frac{\varphi^2}{2}} \left[\mathbf{e}^r \left(\left(1 + \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_r + 0 \times \partial_\varphi\right) + \mathbf{e}^\varphi \left(0 \times \partial_r + \left(1 + \frac{\varphi^2}{2}\right)\partial_\varphi\right)\right] \phi(r, \varphi)$
$= \left[\mathbf{e}^r \partial_r + \mathbf{e}^\varphi \partial_\varphi\right] \phi(r, \varphi)$.