

7. Tutorium**für 13.12.2013****7.1 Multiple Choice Fragen**

a) b) c) Separationsansatz: Separiere folgende Differentialgleichung

$$\left(y \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi(x, y, z) = (\lambda + y^2) \Phi(x, y, z)$$

in Differentialgleichungen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen.

d) e) Verallgemeinerte Funktionen 1: Berechne die n -te Derivierte der verallgemeinerten Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ 0, & |x - \frac{\pi}{2}| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

f) Verallgemeinerte Funktionen 2: Vereinfache folgendes Funktional

$$\left(\frac{d}{dx} - \omega \right) [H(x)e^{\omega x} + H(-x)e^{-\omega x}].$$

7.2 Residuensatza) Berechne alle Lösungen von $x^n + 1 = 0$ über die Formel von de Moivre. Wie sehen die Lösungen für $n = 4$ aus?b) Sei $f(x) = g(x)/h(x)$, wobei g und h analytisch um einen Punkt c seien, und h eine einfache Nullstelle am Punkt c hat. Zeige, dass dann das Residuum an der Stelle c berechnet werden kann durch

$$\text{Res}_{x \rightarrow c} f(x) = \frac{g(c)}{h'(c)}.$$

(Hinweis: Nähere $h(x)$ in der Umgebung von c an durch $h(x) \approx (x - c)h'(c)$).

c) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + ax + b}{x^4 + 1} dx$$

über den Residuensatz.

7.3 Greensche Funktion

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right)y(x) = 2.$$

- a) Finde eine zugehörige Greensche Funktion mit Hilfe des Residuensatzes.
- b) Wie lauten die homogenen Greenschen Funktionen? Konstruiere eine Greensche Funktion, die

$$G(0, x' > 0) = 0 \text{ und } G'(0, x' > 0) = 0$$

erfüllt ($G'(x, x') = \frac{d}{dx}G(x, x')$).

- c) Löse die Differentialgleichung auf $t \in [0, \infty)$ unter den Randbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ mit Hilfe der Greensfunktionen.
- d) Überprüfe durch Einsetzen, dass die Lösung die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2c, 3a, 3b-d