7. Tutorium - Lösungen **13.12.2013**

7.1 Multiple Choice Fragen

a-c) Separationsansatz
$\left(y\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi(x,y,z)=\left(\lambda+y^2\right)\Phi(x,y,z)$
Ansatz: $\Phi(x,y,z)=\Phi_1(x)\Phi_2(y)\Phi_3(z)$.
Ganze Gleichung durch $\Phi=\Phi_1\Phi_2\Phi_3$ dividieren:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right]+\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right]+\frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi_3\right]=\lambda+y^2.$
Φ_3 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[y\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right]+\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right]-y^2=-\frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi_3\right]+\lambda=A(x,y)=A(z)=A=const.$
$\to\Phi_3'(z)=(\lambda-A)\,\Phi_3(z)$.
(Altenativ kann die Konstante auch anders gewählt werden, z.B. $\to\Phi_3'(z)=\tilde{A}\Phi_3(z)$. Es muss nur mit den nachfolgenden Gleichungen konsistent sein.)
Durch y dividieren, Φ_2 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1\right]=\frac{A}{y}-\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right]+y=B(x)=B(y)=B=const.$
$\to\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi_1(x)=B\Phi_1(x)$
$\to\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2(y)=\left(Ay+y^3-By^2\right)\Phi_2(y)$
d) e) $f(x)=\cos(x)H(x)H(\pi-x)$.
$f'(x)=-\sin(x)H(x)H(\pi-x)+\cos(x)\delta(x)H(\pi-x)-\cos(x)H(x)\delta(\pi-x)$
$=-\sin(x)H(x)H(\pi-x)+\delta(x)+\delta(\pi-x)$.
$f''(x)=-\cos(x)H(x)H(\pi-x)-0-0+\delta'(x)+\underbrace{\delta'(\pi-x)}_{=-\delta'(x-\pi)}(-1)$
$=-\cos(x)H(x)H(\pi-x)+\delta'(x)+\delta'(x-\pi)$
$=-f(x)+\delta'(x-\pi)+\delta'(x)$.
$f'''(x)=-f'(x)+\delta''(x-\pi)+\delta''(x)$.
$n\geq 2: f^{(n)}(x)=-f^{(n-2)}+\delta^{(n-1)}(x-\pi)+\delta^{(n-1)}(x)$.
f) $\left(\frac{d}{dx}-\omega\right)\left[H(x)e^{\omega x}+H(-x)e^{-\omega x}\right]$
$=\delta(x)e^{\omega x}+H(x)\omega e^{\omega x}+\delta(-x)(-1)e^{-\omega x}+H(-x)(-\omega)e^{-\omega x}-\omega H(x)e^{\omega x}-\omega H(-x)e^{-\omega x}$
$=\delta(x)+H(x)\omega e^{\omega x}-\delta(x)-H(-x)\omega e^{-\omega x}-\omega H(x)e^{\omega x}-\omega H(-x)e^{-\omega x}$
$=-2H(-x)\omega e^{-\omega x}$
$=-2\omega e^{-\omega x}\left[1-H(x)\right]$.

7.2 Residuensatz

a) Lösungen von $x^n+1=0$, also $x^n=-1$: Satz von de Moivre: $e^{in\varphi}=(e^{i\varphi})^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)$. Rechte Seite ergibt -1 für $n\varphi=\pi(2N+1)$ mit ganzzahligem N. Daher $\varphi=\frac{\pi}{n}(2N+1)$ mit $N=0,1,\ldots,n-1$.
Für $n=4$ hat man $x_1=e^{\frac{i\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $x_2=e^{\frac{3i\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $x_3=e^{\frac{5i\pi}{4}}=e^{-\frac{3i\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$, $x_4=e^{\frac{7i\pi}{4}}=e^{-\frac{i\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.
b) Da $h(x)$ eine einfache Nullstelle bei $x=c$ hat, gilt $h(x)\approx(x-c)h'(c)$ in einer Umgebung von $x=c$. Daher:
$\mathrm{Res}_{x\to c}f(x)=\mathrm{Res}_{x\to c}f(x)=\mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{h(x)}\approx\mathrm{Res}_{x\to c}\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)}=\lim_{x\to c}(x-c)\frac{g(x)}{(x-c)h'(c)}$
$=\lim_{x\to c}\frac{g(x)}{h'(c)}=\frac{g(c)}{h'(c)}$.
Wem das „$\approx$“ zu ungenau ist, der kann $h(x)$ auch in einer Taylor-Reihe $h(x)=0+(x-c)\,h'(c)+\frac{1}{2!}\,(x-c)^2\,h''(c)+\ldots$ expandieren und dann die Laurentreihe des Quotienten bilden. Der Koeffizient $a_{-1}=g(c)/h'(c)$ der Laurentreihe $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x-c)^n$ ist dann genau das gesuchte Residuum.

c) Die Pole befinden sich bei $e^{\pm i\pi/4}$ und $e^{\pm 3i\pi/4}$. Man kann die oberen zwei Pole wählen, und den Integrationsweg über den oberen Halbkreis schließen, der keinen Beitrag liefert: Beitrag über oberen Halbkreis $\mathcal{C}$ mit $x = re^{i\varphi}$, $dx = rie^{i\varphi}d\varphi$ und r groß aber konstant liefert:

$\int_{\mathcal{C}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}dx = \int_0^\pi \frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2+are^{i\varphi}+b}{(re^{i\varphi})^4+1} rie^{i\varphi}d\varphi \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\pi \frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2}{(re^{i\varphi})^4} rie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^\pi \frac{1}{re^{i\varphi}}d\varphi \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Die Residuen an den Polen der oberen Halbebene sind

$\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{i\pi/4}} = \frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4e^{3i\pi/4}}.$

$\mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} = \left.\frac{x^2+ax+b}{4x^3}\right|_{x=e^{3i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{9i\pi/4}} = \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4e^{i\pi/4}}.$

Schließen im oberen Halbkreis (positiver Umlaufsinn, daher kein zusätzliches „-") ergibt:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{x\to e^{i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1} + \mathrm{Res}_{x\to e^{3i\pi/4}} \frac{x^2+ax+b}{x^4+1}\right)$

$= 2\pi i\left(\frac{i+ae^{i\pi/4}+b}{4}e^{-3i\pi/4} + \frac{-i+ae^{3i\pi/4}+b}{4}e^{-i\pi/4}\right)$

$= \frac{\pi i}{2}\left[i\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) + a\left(-i+i\right) + b\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(1+b\right).$

Alternativ könnte man den Halbreis auch unten schließen, wobei man ein zusätzliches negatives Vorzeichen für den negativen Umlaufsinn berücksichtigen muss.

7.3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x = -\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2$, $f(x) = 2$, $\mathcal{L}_x y(x) = f(x)$.

Ansatz: $G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)e^{ik(x-x')}dk$

und $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk$ einsetzen in

$\mathcal{L}_x G(x,x') = \delta(x-x')$,

$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right)G(x,x') = \delta(x-x')$,

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right)e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk,$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(k)\left(k^2 - 3ik - 2\right)e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk.$

Vergleich der Integranden:

$\tilde{G}(k)\left(k^2 - 3ik - 2\right) = 1. \quad \to \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{k^2-3ik-2}.$

$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2}dk.$

$k^2 - 3ik - 2 = (k-2i)(k-i)$

Pole liegen bei $k = 2i$ und $k = i$. Für $x - x' > 0$: Großkreis oben schließen ($ik = i(\mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k) = i\mathrm{Re}k - \mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k > 0$ exponentiell gedämpft). Zwei Pole liegen im Großkreis. Für $x - x' < 0$: Großkreis unten schließen ($\to$ Vorzeichen). Kein Pol liegt im Großkreis.

$G(x,x') = H(x-x')\left[2\pi i\mathrm{Res}_{k\to 2i}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2} + 2\pi i\mathrm{Res}_{k\to i}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{k^2-3ik-2}\right] - H(x'-x)\times 0$

$= H(x-x')\left[2\pi i\lim_{k\to 2i}(k-2i)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{(k-2i)(k-i)} + 2\pi i\lim_{k\to i}(k-i)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{(k-2i)(k-i)}\right]$

$= H(x-x')\left[i\frac{e^{-2(x-x')}}{i} + i\frac{e^{-(x-x')}}{-i}\right]$

$= H(x-x')\left[e^{-2(x-x')} - e^{-(x-x')}\right].$

b)

Die homogenen Greenschen Funktionen lauten: $e^{-2(x-x')}$ und $e^{-(x-x')}$.

Randbedingung: $G(0, x' > 0) = 0$ ist bereits erfüllt.

Allgemein: Homogene Greensche Funktion über Ansatz:

$G = G_I + Ae^{-2(x-x')} + Be^{-(x-x')}$.

$G(0, x' > 0) = 0 + Ae^{2x'} + Be^{x'} = 0.$ (I)

$G'(x,x') = -2Ae^{-2(x-x')} - Be^{-(x-x')}$.

$G'(0, x' > 0) = -2Ae^{2x'} - Be^{x'} = 0.$ (II)

Aus (I) und (II) folgt: $A = 0$, $B = 0$.

$\to G(x,x') = G_I = H(x-x')\left[e^{-2(x-x')} - e^{-(x-x')}\right].$

c)

Lösung: $y(x) = \int_0^\infty G(x,x')f(x')dx' = \int_0^x dx' e^{-2(x-x')}2 - \int_0^x dx' e^{-(x-x')}2$

$= 2\, \frac{e^{-2(x-x')}}{2}\Big|_{x'=0}^{x} - 2\, \frac{e^{-(x-x')}}{1}\Big|_{x'=0}^{x}$
$= 1 - e^{-2x} - 2 + 2e^{-x}$
$= -1 - e^{-2x} + 2e^{-x}$.

d) $y'(x) = \frac{d}{dx}\left(-1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right) = 2e^{-2x} - 2e^{-x}$.
$y''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(-1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right) = -4e^{-2x} + 2e^{-x}$.
Probe der Randbedingungen:
$y(0) = -1 - e^0 + 2e^0 = 0$.
$y'(0) = 2e^0 - 2e^0 = 0$.
Probe der Lösung:
$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right) y(x) = \left(-\frac{d^2}{dx^2} - 3\frac{d}{dx} - 2\right)\left(-1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right)$
$= -\left(-4e^{-2x} + 2e^{-x}\right) - 3\left(2e^{-2x} - 2e^{-x}\right) - 2\left(-1 - e^{-2x} + 2e^{-x}\right)$
$= 4e^{-2x} - 2e^{-x} - 6e^{-2x} + 6e^{-x} + 2 + 2e^{-2x} - 4e^{-x}$
$= 0e^{-2x} + 0e^{-x} + 2 = 2$.