8. Tutorium **für 20.12.2013**

8.1 Multiple Choice Fragen

a) Transformiere den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten. Verwende hierfür den für beliebige Metriken gültigen Ausdruck

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\Phi\right),$$

mit $|g| := \det[g_{ij}]$.
b) Wie lautet die Fourier-transformierte Greensche Funktion zum Differentialoperator $\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 2\omega\frac{d}{dx} + \omega^2$?
c) Welcher Hilfsweg ist harmlos?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}e^{ix}dx$$

d) e) f) Führe den Separationsansatz für die zeitunabhängige, freie (d.h. ohne Potential: $V = 0$) Schrödinger-Gleichung[1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Phi(r,\varphi,\vartheta) = E\Phi(r,\varphi,\vartheta)$$

in Kugelkoordinaten durch.

8.2 Greensche Funktion

Folgende Differentialgleichung sei gegeben:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right)y(x) = \alpha x.$$

a) Berechne eine zugehörige Greensche Funktion für $\lambda > 0$. (Hinweis: Falls die Pole auf der reellen Achse liegen, können sie durch $\pm i\epsilon$ etwas von der reellen Achse weggeschoben werden. Die solcher Art erhaltenen Lösungen unterscheiden sich nur durch eine homogene Greensche Funktion.)
b) Errate homogene Greensche Funktionen. Überprüfe, dass diese die homogene Differentialgleichung erfüllen.
c) Löse die Differentialgleichung auf $x \in [\pi, 2\pi]$ unter den Randbedingungen $y(\pi) = 0$ und $y'(\pi) = -1$ für $\lambda = 1$ und $\alpha = 1$ mit Hilfe der Greenschen Funktionen.

[1] Eine Gleichung dieser Form ist auch als Helmholtz-Gleichung bekannt, und tritt unter anderem bei der Lösung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen auf.

8.3 Sturm-Liouville-Problem

Folgendes ist die Differentialgleichung (DGL) aus Beispiel 8.1def in radialer Richtung mit $r \to x$, $R(r) \to y(x)$.

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{B}{x^2}y = -\lambda y$$

*) Wie passen die Parameter λ und B zum Separationsansatz von Beispiel 8.1def?
a) Schreibe die DGL in die Sturm-Liouville'sche Gestalt. Prüfe, dass diese wieder auf die ursprüngliche DGL führt.
b) Transformiere die DGL in Sturm-Liouville'scher Gestalt durch die Sturm-Liouville'sche Transformation in die Liouville'sche Normalform auf dem Bereich $a < x < b$.
c) Prüfe durch Einsetzen, dass die Liouville'sche Normalform obiger DGL entspricht.
d) Finde für $B = 0$ und $y(a = 1) = y(b = 2) = 0$ die Lösungen der Liouville'schen Normalform durch geeigneten Ansatz und damit die Lösungen für $y(x)$. Prüfe dass diese Lösung obige DGL löst.
(Anmerkung: Berücksichtigt man die anderen DGLen aus obigem Beispiel würden andere Werte für B Sinn machen, für welche die allgemeine Lösung durch sphärische Bessel-Funktionen gegeben ist.)

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a, 2bc, 3a, 3b-d