8. Tutorium - Lösungen **20.12.2013**

8.1 Multiple Choice Fragen

a) Kugelkoordinaten: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$.

$\mathbf{e}'_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'^j}$.

$\to \mathbf{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_\vartheta = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnung der Metrik:

$g'_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j \to \left[g'_{ij}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$, z.B. $\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = 1$, etc.

Determinante: $|g'| = \det\left[g'_{ij}\right] = 1 \times r^2 \times r^2\sin^2\vartheta = r^4\sin^2\vartheta$.

Inverse Metrik: $g'^{ij}g'_{jk} = \delta^i_k \to \left[g'^{ij}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \end{pmatrix}$.

Laplace-Operator: $\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g'|}}\partial'_i\left(\sqrt{|g'|}g'^{ij}\partial'_j\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{r^4\sin^2\vartheta}}\partial'_i\left(\sqrt{r^4\sin^2\vartheta}g'^{ij}\partial'_j\right)\\
&= \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_r\left(r^2\sin\vartheta\times 1\times\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(r^2\sin\vartheta\times\frac{1}{r^2}\times\partial_z\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\varphi\left(r^2\sin\vartheta\times\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\times\partial_\varphi\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\\
&= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.
\end{aligned}$$

b) Die ausführliche Herleitung ist in Beispiel 8.2 angegeben. Um rasch ohne Herleitung zur Lösung zu gelangen, ersetzt man im Differentialoperator $\frac{d}{dx} \to ik$: $\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 2\omega\frac{d}{dx} + \omega^2 \to (ik)^2 - 2\omega(ik) + \omega^2 = -k^2 - 2\omega ik + \omega^2 = (ik-\omega)^2$. Die Inverse des Differentialoperators im Impulsraum ist dann der Propagator: $\tilde{G}(k) = \text{“}\frac{e^{ikx}}{\mathcal{L}_x e^{ikx}}\text{”} = \frac{1}{(ik-\omega)^2}$. (Man sollte aber prinzipiell wissen, wie man es Schritt für Schritt herleitet!)

c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}dx$

Beitrag über oberen Halbkreis $\mathcal{C}$ mit $x = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $dx = rie^{i\varphi}d\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$ und r groß aber konstant liefert:

$$\int_{\mathcal{C}}\frac{x^2-1}{x^4+2x^2+1}e^{ix}dx = \int_0^\pi\frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2-1}{(re^{i\varphi})^4+2(re^{i\varphi})^2+1}e^{i\left(re^{i\varphi}\right)}rie^{i\varphi}d\varphi$$

$$\xrightarrow{r\to\infty}\int_0^\pi\frac{\left(re^{i\varphi}\right)^2}{(re^{i\varphi})^4}rie^{i\varphi}\underbrace{e^{ri(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}_{e^{ir\cos\varphi}e^{-r\sin\varphi}}d\varphi = \frac{i}{r^3}\int_0^\pi\frac{e^{i\cos\varphi}}{e^{i\varphi}}\underbrace{e^{ir\cos\varphi}}_{|\ldots|=1}\underbrace{e^{-r\sin\varphi}}_{\to e^{-\infty}}d\varphi \xrightarrow{r\to\infty} 0.$$

Im unteren Halbkreis $\varphi\in[\pi,2\pi]$ divergiert der Term $e^{-r\sin\varphi}$, somit ist nur der obere Hilfsweg harmlos.

d) e) f) Homogene Laplace-Gleichung: $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right)\Phi(r,\varphi,\vartheta) = E\Phi(r,\varphi,\vartheta)$.

Ansatz: $\Phi(r,\varphi,\vartheta) = R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)$.

$\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)\left[\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\right] + R(r)\Theta(\vartheta)\left[\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi)\right] + R(r)\Phi(\varphi)\left[\frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta(\vartheta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Theta(\vartheta)\right] + \frac{2mE}{\hbar^2}R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta) = 0$.

Durch $R(r)\Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)$ dividieren, mit $r^2\sin^2\vartheta$ multiplizieren:

$\frac{r^2\sin^2\vartheta}{R(r)}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\right] + \frac{\sin^2\vartheta}{\Theta(\vartheta)}\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta(\vartheta) + \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Theta(\vartheta)\right] + \frac{2mE}{\hbar^2}r^2\sin^2\vartheta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = A(r,\vartheta) = A(\varphi) = A = const.$

$\to \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi(\varphi) = -A\Phi(\varphi)$.

$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}R(r)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)\right]+\frac{2mE}{\hbar^2}r^2=\frac{A}{\sin^2\vartheta}-\frac{1}{\Theta(\vartheta)}\left[\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta(\vartheta)+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Theta(\vartheta)\right]=B(r)=B(\vartheta)=B=const.$
$\to\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\Theta(\vartheta)+\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\Theta(\vartheta)=\left(\frac{A}{\sin^2\vartheta}-B\right)\Theta(\vartheta).$
$\to 2r\frac{\partial}{\partial r}R(r)+r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}R(r)=\left(-\frac{2mE}{\hbar^2}r^2+B\right)R(r).$

8.2 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x=-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda$, $f(x)=\alpha x$, $\mathcal{L}_x y(x)=f(x)$.
Ansatz: $G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)e^{ik(x-x')}dk$
und $\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$ einsetzen in
$\mathcal{L}_x G(x,x')=\delta(x-x')$,
$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)G(x,x')=\delta(x-x')$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)e^{ik(x-x')}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk,$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left(k^2-\lambda\right)e^{ik(x-x')}dk=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk.$
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\left(k^2-\lambda\right)=1. \quad\to\quad \tilde{G}(k)=\frac{1}{k^2-\lambda}=\frac{1}{\left(k-\sqrt{\lambda}\right)\left(k+\sqrt{\lambda}\right)}.$
(Etwas ausführlicher: Fourier-Transformation $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}$ auf beiden Seiten angewandt:

$$\to\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(k^2-\lambda\right)e^{ik(x-x')}=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ik(x-x')}.$$

$$\to\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(k^2-\lambda\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')}.$$

$$\to\tilde{G}(k')\left(k'^2-\lambda\right)=1.)$$

$G(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{\left(k-\sqrt{\lambda}\right)\left(k+\sqrt{\lambda}\right)}dk.$
Beide Pole liegen genau auf der reellen Achse. Um den Residuensatz anwenden zu können, werden die Pole leicht verschoben, z.B. nach oben[1]: $(k-k_1)(k-k_2)=\left(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)\left(k-\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)$ mit $k_1=-\sqrt{\lambda}+i\varepsilon$, $k_2=\sqrt{\lambda}+i\varepsilon$. Beide Pole liegen nun im oberen Bereich. Für $x-x'>0$: Großkreis oben schließen ($ik=i(\mathrm{Re}k+i\mathrm{Im}k)=i\mathrm{Re}k-\mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k>0$ exponentiell gedämpft). Für $x-x'<0$: Großkreis unten schließen: hier sind keine Pole mehr eingeschlossen.
$G(x,x')=H(x-x')\left[2\pi i\mathrm{Res}_{k\to-\sqrt{\lambda}+i\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{\left(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)\left(k-\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)}+2\pi i\mathrm{Res}_{k\to-\sqrt{\lambda}+i\varepsilon}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{\left(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)\left(k-\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)}\right]+H(x'-x)\times 0$
$=H(x-x')2\pi i\left[\lim_{k\to-\sqrt{\lambda}+i\varepsilon}(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{\left(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)\left(k-\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)}-\lim_{k\to\sqrt{\lambda}+i\varepsilon}(k+i\omega)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{\left(k+\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)\left(k-\sqrt{\lambda}-i\varepsilon\right)}\right]$
$=H(x-x')\left[i\frac{e^{i\left(-\sqrt{\lambda}+i\varepsilon\right)(x-x')}}{-2\sqrt{\lambda}}+i\frac{e^{i\left(\sqrt{\lambda}+i\varepsilon\right)(x-x')}}{2\sqrt{\lambda}}\right]\overset{\varepsilon\to 0}{=}H(x-x')\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\left(e^{-i\sqrt{\lambda}(x-x')}-e^{i\sqrt{\lambda}(x-x')}\right)=H(x-x')\frac{-\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-x')\right)}{\sqrt{\lambda}}=:G_I(x,x').$
b) Homogene Greensche Funktion: z.B. $G_{H1}=\sin\left(\sqrt{\lambda}\,(x-x')\right)$.
Probe: $\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,(x-x')\right)=(\lambda-\lambda)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,(x-x')\right)=0$. Ok.
Weitere Funktion: $G_{H2}=\cos\left(\sqrt{\lambda}\,(x-x')\right)$.
Probe: $\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,(x-x')\right)=0$.
c) Beitrag der inhomogenen Greenschen Funktion für $\pi<x<2\pi$:
$y(x)=\int_{\pi}^{2\pi}G_I(x,x')f(x')dx'=\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi}H(x-x')}_{\int_{\pi}^{x}}\frac{-\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-x')\right)}{\sqrt{\lambda}}\alpha x'dx'$

[1]Alternativ können beide Pole auch nach unten verschoben werden, oder einer nach oben und der andere nach unten. Die so entstehenden Lösungen unterscheiden sich nur durch homogene Greensche Funktionen, womit die Endlösung nach Anpassung der Randbedingungen wieder eindeutig wird.

$= -\frac{\alpha}{\lambda}\left[\cos\left(\sqrt{\lambda}(x-x')\right)x'\Big|_{x'=\pi}^{x} - \int_\pi^x \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-x')\right)dx'\right]$
$= -\frac{\alpha}{\lambda}\left[\cos(0)\,x - \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-\pi)\right)\pi + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\sin(0) - \sin\left(\sqrt{\lambda}(x-\pi)\right)\right)\right]$
$= -\frac{\alpha}{\lambda}\left[x - \cos\left(\sqrt{\lambda}(x-\pi)\right)\pi - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\sqrt{\lambda}(x-\pi)\right)\right].$
Für $\alpha = \lambda = 1$:
$y(x) = -x + \pi\cos(x-\pi) + \sin(x-\pi) = -x - \pi\cos x - \sin x.$
$y'(x) = -1 + \pi\sin x - \cos x.$
Das erfüllt die Randbedingungen noch nicht:
$y(\pi) = -\pi - \pi\cos\pi - \sin\pi = -\pi + \pi = 0..$ OK,
$y'(\pi) = -1 + \pi\sin\pi - \cos\pi = 0 \neq -1.$
Anpassen der Lösung mit Hilfe mit Hilfe zweier beliebiger linear unabhängigen homogenen Lösungen $y_H(x)$:
Wähle $y_{H1}(x) = G_{H1}(x,\pi)$ und $y_{H2}(x) = G_{H2}(x,\pi)$:
$y(x) = -x - \pi\cos x - \sin x + AG_{H1}(x,\pi) + BG_{H2}(x,\pi)$
$= -x - \pi\cos x - \sin x + A\sin(x-\pi) + B\cos(x-\pi)$
$= -x - \pi\cos x - \sin x - A\sin x - B\cos x.$
$y'(x) = -1 + \pi\sin x - \cos x - A\cos x + B\sin x$
Anpassen an Randbedingungen:
$y(\pi) = 0 = \pi + \pi\cos\pi - \sin\pi - A\sin\pi - B\cos\pi = B.$
$y'(\pi) = -1 = -1 + \pi\sin\pi - \cos\pi - A\cos\pi + B\sin\pi = A.$
$B = 0$, $A = -1$.
$\rightarrow y(x) = -x - \pi\cos x.$
Probe: $y(\pi) = -\pi - \pi\cos\pi = 0.$
$y'(\pi) = -1 + \pi\sin\pi = -1.$
$\frac{d}{dx}y(x) = -1 + \pi\sin x.$
$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = \pi\cos x.$
$\mathcal{L}_x y(x) = -\pi\cos x - [-x - \pi\cos x] = x.$

8.3 Sturm-Liouville-Problem

*) $B \rightarrow B$, $\frac{2mE}{\hbar^2} \rightarrow \lambda$.
a)$\mathcal{L}_x y(x) = y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{B}{x^2}y \stackrel{!}{=} a_0(x)y(x) + a_1(x)\frac{d}{dx}y(x) + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2}y(x).$
$a_0(x) = -\frac{B}{x^2}$, $a_1(x) = \frac{2}{x}$, $a_2(x) = 1$.
$\rightarrow$Transformation auf Sturm-Liouville Form $\mathcal{S}_x y(x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]y(x) + q(x)y(x)$
mit $p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} = \exp\left(\int \frac{2}{x}dx\right) = \exp(2\ln x + c) = x^2\exp c = x^2\tilde{c}.$
$q(x) = p(x)\frac{a_0(x)}{a_2(x)} = -x^2\tilde{c}\frac{B}{x^2} = -\tilde{c}B.$
$\mathcal{S}_x y(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2\tilde{c}\frac{d}{dx}\right)y(x) - \tilde{c}By(x).$
Im folgenden: $\tilde{c} = 1$: $\mathcal{L}_x y(x) = \frac{a_2(x)}{p(x)}\mathcal{S}_x y(x) = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right)y(x) - By(x)\right] = \frac{1}{x^2}\left[\left(x^2y'\right)' - By\right].$
Probe: $\frac{1}{x^2}\left[\left(x^2y'\right)' - By\right] = \frac{1}{x^2}\left[2xy' + x^2y'' - By\right] = y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{B}{x^2}y = \mathcal{L}_x y(x).$
b) $\mathcal{L}_x y(x) = f(x) = -\lambda y \quad \rightarrow \quad \mathcal{S}_x y(x) = F(x),$
$F(x) = p(x)\frac{f(x)}{a_2(x)} = x^2\frac{-\lambda y}{1} = -x^2\lambda y.$
$\rho(x) = \frac{F(x)}{-\lambda y(x)} = x^2.$
$[\mathcal{S}_x + \lambda\rho(x)]\,y(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \left[\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{d}{dx}\right) - B + x^2\lambda\right]y(x) = 0$ für $x \in [a,b]$.
(Zusammgengefasst: $\rho(x) = x^2$, $p(x) = x^2$, $q(x) = -B$.)
Sturm-Liouville Transformation:
$\xi = t(x) = \int_a^x \sqrt{\frac{\rho(s)}{p(s)}}ds = \int_a^x \sqrt{\frac{s^2}{s^2}}ds = \int_a^x 1ds = x - a \quad \rightarrow \quad x(t) = t + a.$
$w(t) = \sqrt[4]{p(x(t))\rho(x(t))}\,y(x(t)) = \sqrt[4]{(t+a)^2(t+a)^2}\,y(t+a) = (t+a)\,y(t+a).$
$\hat{q}(t) = \frac{1}{\rho}\left[-q - \sqrt[4]{p\rho}\left(p\left(\frac{1}{\sqrt[4]{p\rho}}\right)'\right)'\right] = \frac{1}{x^2}\left[B - \sqrt[4]{x^2x^2}\left(x^2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^2x^2}}\right)'\right)'\right]$

$= \frac{1}{x^2}\left[B - x^2\left(x^2\left(\frac{1}{x}\right)'\right)'\right] = \frac{1}{x^2}\left[B - x^2\left(x^2\frac{-1}{x^2}\right)'\right] = \frac{1}{x^2}\left[B - x^2 0\right]$
$= \frac{1}{x^2}B = \frac{1}{(t+a)^2}B.$
$c = t(b) = b - a.$
Liouvillesche Normalform:
$-\frac{d^2}{dt^2}w(t) + \left[\hat{q}(t) - \lambda\right]w(t) = 0$ für $t \in [0, b-a]$,
$-\frac{d^2}{dt^2}w(t) + \left[\frac{1}{(t+a)^2}B - \lambda\right]w(t) = 0$ für $t \in [0, b-a]$.
c) Probe: $w(t) = (t+a)\,y(t+a)$.
$\frac{d^2}{dt^2}w(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left((t+a)\,y(t+a)\right) = \frac{d}{dt}\left(y(t+a) + (t+a)\,y'(t+a)\right)$
$= y'(t+a) + y'(t+a) + (t+a)\,y''(t+a)$
$= 2y'(x) + xy''(x)$
$\rightarrow -\frac{d^2}{dt^2}w(t) + \left[\frac{1}{(t+a)^2}B - \lambda\right]w(t) = -xy''(x) - 2y'(x) + \frac{xy(x)}{x^2}B - \lambda xy = 0.$
$\overset{/(-x)}{\rightarrow} y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{By}{x^2} + \lambda y = 0 = \mathcal{L}_x y + \lambda y.$
d) $B = 0$: $-\frac{d^2}{dt^2}w(t) + \left[-\lambda\right]w(t) = 0$. $\rightarrow w'' = -\lambda w.$
Ansatz: $w(t) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}t) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}t).$
$y(1) = y(2) = 0 \rightarrow w(0) = w(1) = 0 \rightarrow \beta = 0,\ \sqrt{\lambda} = \pi m$ mit $m \in \mathbb{N}$.
$\rightarrow \lambda = (\pi m)^2,\ w(t) = \alpha\sin(\pi m t).$
Eingesetzt in $y(x) = y(t+a) = \frac{w(t)}{t+a} = \frac{w(x-a)}{x}$: $y(x) = \frac{1}{x}w(x-a) = \frac{1}{x}\alpha\sin(\pi m(x-a)).$
Probe: $y'(x) = -\frac{\alpha}{x^2}\sin(\pi m(x-a)) + \frac{\alpha\pi m}{x}\cos(\pi m(x-a))$
$y''(x) = 2\frac{\alpha}{x^3}\sin(\pi m(x-a)) - \frac{\alpha\pi m}{x^2}\cos(\pi m(x-a))$
$\quad - \frac{\alpha\pi m}{x^2}\cos(\pi m(x-a) - \frac{\alpha(\pi m)^2}{x}\sin(\pi m(x-a))$
$\rightarrow y'' + \frac{2}{x}y' = \sin(\pi m(x-a))\left[2\frac{\alpha}{x^3} - \frac{\alpha(\pi m)^2}{x} - \frac{2}{x}\frac{\alpha}{x^2}\right]$
$\quad + \cos(\pi m(x-a))\left[-2\frac{\alpha\pi m}{x^2} + \frac{2}{x}\frac{\alpha\pi m}{x}\right]$
$= \sin(\pi m(x-a))\left[-\frac{\alpha(\pi m)^2}{x}\right] + 0 = -(\pi m)^2\,y(x) = -\lambda y(x).$ $\rightarrow$OK.