9. Tutorium **für 10.01.2014**

9.1 Multiple Choice Fragen

a) Wie lautet die Fourier-transformierte Greensche Funktion zum Differentialoperator $\mathcal{L}_x = \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right)$?
b) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2 (x-i)^2} dx.$$

c) Welcher Hilfsweg ist harmlos?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-i} dx.$$

d) Welcher Hilfsweg ist harmlos?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x-i} dx.$$

e) Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x-i} dx.$$

f) Separiere die folgende Differentialgleichung in Differentialgleichungen, die jeweils nur von einer Variablen abhängen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi(x,y,z) = (x+z)\,\Phi(x,y,z).$$

9.2 Fuchssche Klasse

Folgendes ist die Differentialgleichung aus Beispiel 8.3:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{B}{x^2}y = -\lambda y$$

a) Untersuche, ob die Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse angehört. Wie lauten die charakteristischen Exponenten $\sigma_{1,2}$ an der Stelle $x = 0$? Wie

an $x = \infty$? Gibt es Parameter B und λ für die alle singulären Punkte (einschließlich unendlich) regulär sind?
b) Gib eine Lösungsbasis für $\lambda = 0$ und $B > 0$ an.
c) Überprüfe die Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.
d) Finde für $\lambda \neq 0$ eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der generalisierten Potenzreihenentwicklung der Lösung an der Stelle $x = 0$. (Hier kann $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + B} \notin \mathbb{Z}$ angenommen werden.)
e) Zeige, dass die Rekursionsformel auf eine generalisierte Potenzreihe führt, die proportional zu den sphärischen Bessel-Funktionen $j_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(z)$ ist, wobei die Bessel-Funktionen $J_\alpha(z)$ gegeben sind durch

$$J_\alpha(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\alpha}.$$

Schreibe die Lösung obiger Differentialgleichung mit Hilfe der sphärischen Besselfunktionen[1]. (Hier kann zusätzlich $\sqrt{\frac{1}{4} + B} \notin \mathbb{Z}$ angenommen werden.)
f) Überprüfe die Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

9.3 Greensche Funktion

Folgende Differentialgleichung für $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha \neq \beta$ sei gegeben:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha - \beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right) y(x) = \beta.$$

a) Berechne eine zugehörige Greensche Funktion.
b) Errate homogene Greensche Funktionen. Überprüfe, dass diese die homogene Differentialgleichung erfüllen.
c) Löse die Differentialgleichung für $\alpha = 1$ und $\beta = 2$ auf $x \in [\alpha, \beta]$ unter den Randbedingungen $y(\alpha) = e^{-\alpha}$ und $y(\beta) = e^{-\beta}$ mit Hilfe der Greenschen Funktionen.
d) Überprüfe, dass die Lösung die Randbedingungen und die Differentialgleichung erfüllt.

Ankreuzbar: 1a-d, 1e-f, 2a-c, 2d-f, 3ab, 3cd

[1] Die dabei vorkommende Gamma-Funktion $\Gamma(x)$ ist eine Erweiterung der Fakultät $n!$ für reelle oder komplexe x mit $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$.