9. Tutorium - Lösungen **10.01.2014**

9.1 Multiple Choice Fragen

a) Die ausführliche Herleitung ist in Beispiel 9.3 angegeben. Um rasch ohne Herleitung zur Lösung zu gelangen, ersetzt man im Differentialoperator $\frac{d}{dx} \to ik$: $\mathcal{L}_x = \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - 1\right) \to (ik-1)\left((ik)^2 - 1\right) = (ik-1)(ik-1)(ik+1) = (ik-1)^2(ik+1) = (ik+1)(ik-1)^2$. Die Inverse des Differentialoperators im Impulsraum ist dann der Propagator: $\tilde{G}(k) = \text{“}\frac{e^{ikx}}{\mathcal{L}_x e^{ikx}}\text{”} = \frac{1}{(ik-1)(-k^2-1)} = \frac{1}{(ik+1)(ik-1)^2}$. (Man sollte aber prinzipiell wissen, wie man es Schritt für Schritt herleitet!)

b) Für die Berechnung des Residuums eines Pols n-ter Ordnung verwendet man:
$\text{Res}_{k\to c} f(k) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{k\to c}\frac{d^{n-1}}{dk^{n-1}}\left[(k-c)^n f(k)\right]$.
Hier ist die Formel für $n=2$ anzuwenden.
Der Weg kann oben oder unten geschlossen werden. Wählen wir den oberen Weg mit Doppelpol bei $x=i$:
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+i)^2(x-i)^2}dx = 2\pi i \text{Res}_{x\to i}\frac{1}{(x+i)^2(x-i)^2} = 2\pi i \frac{1}{1!}\lim_{x\to i}\frac{d}{dx}\left[(x-i)^2\frac{1}{(x+i)^2(x-i)^2}\right]$
$= 2\pi i \lim_{x\to i}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+i)^2}\right] = 2\pi i\lim_{x\to i}\frac{-2}{(x+i)^3} = \frac{-4\pi i}{8i^3} = \frac{\pi}{2}$.

c) Beitrag über oberen Halbkreis $\mathcal{C}$ mit $x = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $dx = rie^{i\varphi}d\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$ und r groß aber konstant liefert:
$\int_{\mathcal{C}}\frac{1}{x-i}dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{re^{i\varphi}-i}rie^{i\varphi}d\varphi$
$\xrightarrow{r\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{re^{i\varphi}}rie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{\pi}d\varphi = i\pi$.

d) Beitrag über oberen Halbkreis $\mathcal{C}$ mit $x = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $dx = rie^{i\varphi}d\varphi$, $\varphi\in[0,\pi]$ (oder $\varphi\in[\pi,2\pi]$ für den unteren Halbkreis) und r groß aber konstant liefert:
$\int_{\mathcal{C}}\frac{e^{-ix}}{x-i}dx = \int_0^{\pi}\frac{e^{-i\left(re^{i\varphi}\right)}}{re^{i\varphi}-i}rie^{i\varphi}d\varphi$
$\xrightarrow{r\to\infty}\int_0^{\pi}\underbrace{e^{-ri(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}_{e^{-ir\cos\varphi}e^{r\sin\varphi}}\frac{1}{re^{i\varphi}}rie^{i\varphi}d\varphi = i\int_0^{\pi}\frac{e^{i\cos\varphi}}{e^{i\varphi}}\underbrace{e^{-ir\cos\varphi}}_{|\dots|=1}\underbrace{e^{r\sin\varphi}}_{\to e^{-\infty}}d\varphi \xrightarrow{r\to\infty} 0.$
Im oberen Halbkreis $\varphi\in[0,\pi]$ divergiert der Term $e^{r\sin\varphi}$ für große r, aber im unteren Halbkreis $\varphi\in[\pi,2\pi]$ verschwindet er, somit ist nur der untere Hilfsweg harmlos.

e) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x-i}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x-i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-i}dx - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix}}{x-i}dx$.
Für das erste Integral wird der Integrationsweg oben geschlossen, für das zweite Integral unten. Nur das erste Integral umschließt einen Pol und liefert einen Residuumsbeitrag:
$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x-i}dx = \frac{1}{2i}2\pi i\text{Res}_{x\to i}\frac{e^{ix}}{x-i} = \pi\lim_{x\to i}(x-i)\frac{e^{ix}}{x-i} = \pi e^{i^2} = \pi e^{-1} = \frac{\pi}{e}$.

f) Ansatz: $\Phi(x,y,z) = \Phi_1(x)\Phi_2(y)\Phi_3(z)$.
Ganze Gleichung durch $\Phi = \Phi_1\Phi_2\Phi_3$ dividieren:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + x\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + \frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_3\right] = x + z.$
Φ_3 abspalten:
$\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] + x\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] - x = -\frac{1}{\Phi_3}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi_3\right] + z = A(x,y) = A(z) = A = const.$
$\to \Phi_3''(z) = (z-A)\,\Phi_3(z)$.
Umformen, Φ_2 herausheben:
$\left\{\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right] + x\right\}\frac{1}{\Phi_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2\right] = A + x.$
$\frac{\frac{1}{\Phi_1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1\right]+x}{A+x} = \frac{\Phi_2}{\frac{\partial}{\partial y}\Phi_2} = B(x) = B(y) = B = const.$
$\to \frac{\partial}{\partial y}\Phi_2(y) = \frac{1}{B}\Phi_2(y)$.
$\to \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1(x) = [B(A+x) - x]\,\Phi_1(x)$.

9.2 Fuchssche Klasse

a) $y'' + \frac{2}{x}y' + \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) y = 0 = y'' + d(x)y' + e(x)y.$
$\rightarrow d(x) = \frac{2}{x}$, $e(x) = -\frac{B}{x^2} + \lambda.$
Singuläre Punkte an $x_0 = 0$:
$\alpha_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)d(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)\frac{2}{x} = 2.$
$\beta_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2 e(x) = \lim_{x\to 0}(x - 0)^2 \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) = -B.$
Charakteristische Exponenten:
$f_0(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0 = \sigma(\sigma - 1) + \sigma \times 2 - B = \sigma^2 + \sigma - B.$
$\sigma_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + B}.$
$\rightarrow \sigma_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4B}}{2}$, $\sigma_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4B}}{2}.$

Singuläre Punkte um $x = \infty$: Transformation $t = 1/x$:
$u'' + \tilde{p}_1(t)u' + \tilde{p}_2(t)u = 0$ mit $\tilde{p}_1 = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}d(\frac{1}{t})$, $\tilde{p}_2 = \frac{1}{t^4}e(\frac{1}{t})$.
$\rightarrow \tilde{p}_1 = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}2t = 0$, $\tilde{p}_2 = \frac{1}{t^4}\left(-Bt^2 + \lambda\right) = -\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}.$
$\rightarrow u'' + 0u' + \left(-\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}\right) u = 0.$
Singuläre Punkte bei $t = 0$:
$\alpha_0 = \lim_{t\to 0} t\tilde{p}_1(t) = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$
$\beta_0 = \lim_{t\to 0} t^2\tilde{p}_2(t) = \lim_{t\to 0} t^2 \left(-\frac{B}{t^2} + \frac{\lambda}{t^4}\right) = -B + \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{t^2}.$
$\beta_0 \rightarrow \infty$ (irregulärer singulärer Punkt!)
Außer: $\lambda = 0$. Dann ist $\beta_0 = -B$ (regulärer singulärer Punkt). Für $\lambda = 0$ gilt:
$\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = -B.$
Charakteristische Exponenten:
$f_0(\sigma) = \sigma(\sigma - 1) + \sigma\alpha_0 + \beta_0 = 0 = \sigma(\sigma - 1) + \sigma \times 0 - B = \sigma^2 - \sigma - B.$
$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + B}.$
$\rightarrow \sigma_1 = \frac{1+\sqrt{1+4B}}{2}$, $\sigma_2 = \frac{1-\sqrt{1+4B}}{2}.$
b)
Ansatz für generalisierte Potenzreihe: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^{n+\sigma}.$
$\rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n + \sigma) x^{n+\sigma-1},$
$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n (n + \sigma)(n + \sigma - 1) x^{n+\sigma-2}.$
Einsetzen liefert:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \left(-\frac{B}{x^2} + \lambda\right) y = 0 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma-2} w_n \left[(n + \sigma)(n + \sigma - 1) + 2(n + \sigma) - B\right] + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+\sigma} w_n \lambda}_{\sum_{n=2}^{\infty} x^{n+\sigma-2} w_{n-2}\lambda}$$

$$= \sum_{n=0}^{1} x^{n+\sigma-2} w_n \left[(n + \sigma)^2 + (n + \sigma) - B\right] + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n+\sigma-2} \left\{w_n \left[(n + \sigma)^2 + (n + \sigma) - B\right] + w_{n-2}\lambda\right\}.$$

$\rightarrow w_n \left[(n + \sigma)^2 + (n + \sigma) - B\right] = 0$ für $n = 0$ oder $n = 1$;
$w_n \left[(n + \sigma)^2 + (n + \sigma) - B\right] + w_{n-2}\lambda = 0$ für $n \geq 2$.
Für $\lambda = 0$ und mit $\sigma_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + B}$: $w_n \left[\left(n - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right)^2 + \left(n - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right) - B\right] = 0.$
$w_n n \left(n \pm \sqrt{1 + 4B}\right) = 0.$
Falls $\sqrt{1 + 4B}$ nicht ganzzahlig ist, kann das nur erfüllt sein für $w_0 = C \neq 0$, $w_{n>1} = 0$.
Für $\sigma_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + B} = -m$ ganzzahlig (d.h. $B = m(m - 1)$) ist auch $n = \sqrt{1 + 4B} = 2m - 1$ möglich und somit $w_{2m-1} = w_{\sqrt{1+4B}} = E \neq 0$ möglich.
$\rightarrow y_1(x) = Cx^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+B}} = Cx^{m-1}$, $y_2(x) = Dx^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+B}} = Dx^{-m}$ bzw. $y_2(x) = x^{-m}\left(E + Fx^{2m-1}\right)$ falls $-m$ ganzzahlig. Der Term proportional zu F entspricht aber gerade $y_1(x)$.
Kombinierte Lösung: $y(x) = Cx^{m-1} + Dx^{-m} = Cx^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+B}} + Dx^{-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+B}}.$
c) Einsetzen: $y'(x) = C\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right) x^{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+B}} + D\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right) x^{-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+B}},$
$y''(x) = C\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right)\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right) x^{-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+B}} + D\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right)\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + B}\right) x^{-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+B}}$

$$= C\left(1+B-2\sqrt{\tfrac14+B}\right)x^{-\frac52+\sqrt{\frac14+B}} + D\left(1+B+2\sqrt{\tfrac14+B}\right)x^{-\frac52-\sqrt{\frac14+B}}.$$

$$y''+\tfrac{2}{x}y'-\tfrac{B}{x^2}y=0=x^{-\frac52+\sqrt{\frac14+B}}C\underbrace{\left[1+B-2\sqrt{\frac14+B}+2\left(-\frac12+\sqrt{\frac14+B}\right)-B\right]}_{=0}$$

$$+x^{-\frac52-\sqrt{\frac14+B}}D\underbrace{\left[1+B+2\sqrt{\frac14+B}+2\left(-\frac12-\sqrt{\frac14+B}\right)-B\right]}_{=0}=0.$$

d) Für $\lambda\neq 0$ gilt: $w_0=C\neq 0$, $w_1=0$,
$w_n\left[(n+\sigma)^2+(n+\sigma)-B\right]+w_{n-2}\lambda = 0$ für $n\geq 2$. D.h. nur gerade n verschwinden nicht: $w_{2m}\neq 0$, $w_{2m+1}=0$ für $m\in\mathbb{N}$.
$w_n=-\frac{w_{n-2}\lambda}{(n+\sigma)^2+(n+\sigma)-B}=-\frac{w_{n-2}\lambda}{\left(n-\frac12\pm\sqrt{\frac14+B}\right)^2+\left(n-\frac12\pm\sqrt{\frac14+B}\right)-B}=-\frac{w_{n-2}\lambda}{n\left(n\pm\sqrt{1+4B}\right)}$.
e) Generalisierte Potenzreihe: $y(x)=\sum_{n=0}^\infty w_n x^{\sigma+n}$.
Vergleich mit Bessel-Funktion: $v_m:=w_{2m}=w_n=-\frac{v_{m-1}\lambda}{2m\left(2m\pm\sqrt{1+4B}\right)}=-\frac{v_{m-1}\lambda}{4m\left(m\pm\sqrt{\frac14+B}\right)}$, $y(x)=\sum_{m=0}^\infty v_m x^{\sigma+2m}$.

Auflösen der Rekursion: $4\times4\times\ldots\times4=4^m=2^{2m}$.
$m(m-1)(m-2)\times\ldots\times2\times1=m!$.
$\left(m\pm\sqrt{\frac14+B}\right)\left(m\pm\sqrt{\frac14+B}-1\right)\times\ldots\times\left(\pm\sqrt{\frac14+B}+1\right)=\frac{\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}{\Gamma(\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}$.
$\rightarrow v_m=v_0\frac{(-1)^m\Gamma(\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}{2^{2m}m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\lambda^m$.
$y(x)=\sum_{m=0}^\infty v_0\frac{(-1)^m\Gamma(\pm\sqrt{\frac14+B}+1)\lambda^m}{2^{2m}m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}x^{2m-\frac12\pm\sqrt{\frac14+B}}$

$$=\underbrace{v_0}_{=w_0}\frac{2^{\pm\sqrt{\frac14+B}}\Gamma(\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}{\sqrt{\lambda}^{\pm\sqrt{\frac14+B}}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\frac{\sqrt{\lambda}^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}}{2^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}}$$

$$=\underbrace{w_0\frac{2^{\pm\sqrt{\frac14+B}}\Gamma(\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}{\sqrt{\lambda}^{\pm\sqrt{\frac14+B}}}\sqrt{\frac{2\sqrt{\lambda}}{\pi}}}_{=:\tilde w_0}\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}x}}J_{\pm\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)$$

$=\tilde w_0 j_{-\frac12\pm\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)$.
Lösung: $y(x)=C\,j_{-\frac12+\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)+D\,j_{-\frac12-\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)$.
f) Probe:
$y(x)=\tilde w_0 j_{-\frac12\pm\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)=\tilde w_0\sqrt{\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}x}}J_{\pm\sqrt{\frac14+B}}(\sqrt{\lambda}x)$

$$=\tilde w_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12},$$

$$y'(x)=\tilde w_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\sum_{m=0}^\infty\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12\right)\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac32},$$

$$y''(x)=\tilde w_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\sum_{m=0}^\infty\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12\right)\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac32\right)\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac52}.$$

$$y''+\tfrac{2}{x}y'+\left(-\tfrac{B}{x^2}+\lambda\right)y=0=\tilde w_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac52}$$

$$\times\left[\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12\right)\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac32\right)+2\left(2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12\right)-B\right]$$

$$+\lambda\tilde w_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\underbrace{\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac12}}_{\sum_{m=1}^\infty\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(m\pm\sqrt{\frac14+B})}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-2}x^{2m\pm\sqrt{\frac14+B}-\frac52}}$$

$$= \tilde{w}_0 \times \ldots \times \underbrace{\left[\left(2\times 0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{1}{2}\right)\left(2\times 0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{3}{2}\right)+2\left(2\times 0 \pm \sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{1}{2}\right)-B\right]}_{=0}$$

$$+\tilde{w}_0\sqrt{\tfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}}\textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m\pm\sqrt{B}+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)^{2m\pm\sqrt{B}}x^{2m\pm\sqrt{B}-2}$$

$$\times\underbrace{\left[\left(2m\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{1}{2}\right)\left(2m\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{3}{2}\right)+2\left(2m\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}-\frac{1}{2}\right)-B+\lambda\frac{(-1)\,m\left(m\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}\right)2^2}{\sqrt{\lambda}^2}\right]}_{4m^2+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+B-4m\pm 4m\sqrt{\frac{1}{4}+B}-2\left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}\right)+4m-1\pm 2\sqrt{\frac{1}{4}+B}-B-4m^2-4m\left(\pm\sqrt{\frac{1}{4}+B}\right)=0} =$$

0.

9.3 Greensche Funktion

a) $\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} - (\alpha-\beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta$, $f(x) = \beta-\alpha$, $\mathcal{L}_x y(x) = f(x)$.
Ansatz: $G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)e^{ik(x-x')}dk$
und $\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$ einsetzen in
$\mathcal{L}_x G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha-\beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right)G(x,x') = \delta(x-x')$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha-\beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right)e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$,
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(k)\left((ik)^2 - (\alpha-\beta)\,ik - \alpha\beta\right)e^{ik(x-x')}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x-x')}dk$.
Vergleich der Integranden:
$\tilde{G}(k)\left(-k^2 - (\alpha-\beta)\,ik - \alpha\beta\right) = 1. \quad \to \quad \tilde{G}(k) = \frac{1}{-k^2-(\alpha-\beta)ik-\alpha\beta} = \frac{1}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}$.
(Etwas ausführlicher: Fourier-Transformation $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}$ auf beiden Seiten angewandt:

$$\to \int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(-k^2-(\alpha-\beta)\,ik-\alpha\beta\right)e^{ik(x-x')} = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ik'(x-x')}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ik(x-x')}.$$

$$\to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\tilde{G}(k)\left(-k^2-(\alpha-\beta)\,ik-\alpha\beta\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i(k-k')(x-x')}}_{2\pi\delta(k-k')}.$$

$$\to \tilde{G}(k')\left(-k'^2-(\alpha-\beta)\,ik'-\alpha\beta\right) = 1.)$$

$G(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}dk$.
Es gibt einen Pol an der Stelle $k=-i\alpha$ und einen an der Stelle $k=i\beta$. Um den Residuensatz anwenden zu können, wird die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ durch einen harmlosen Großkreis entweder oben oder unten geschlossen. Falls $x-x'>0$ kann man den Großkreis oben schließen ($ik = i(\mathrm{Re}k + i\mathrm{Im}k) = i\mathrm{Re}k - \mathrm{Im}k$: Für $\mathrm{Im}k > 0$ ist der Integrand exponentiell gedämpft). Das Integral ist über den Residuensatz als Summe über alle eingeschlossenen Residuen zu berechnen. Für $x-x'<0$ kann man den Großkreis unten schließen. Hierbei ist der negative Umlaufsinn zu berücksichtigen.
$G(x,x') = H(x-x')\left[2\pi i\mathrm{Res}_{k\to i\beta}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}\right] + H(x'-x)\left[-2\pi i\mathrm{Res}_{k\to -i\alpha}\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}\right]$
$= H(x-x')2\pi i\left[\lim_{k\to i\beta}(k-i\beta)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}\right] - H(x'-x)2\pi i\left[\lim_{k\to -i\alpha}(k+i\alpha)\frac{1}{2\pi}\frac{e^{ik(x-x')}}{-(k+i\alpha)(k-i\beta)}\right]$
$= H(x-x')\frac{2\pi i}{2\pi}\frac{e^{-\beta(x-x')}}{-i\beta-i\alpha} - H(x'-x)\frac{2\pi i}{2\pi}\frac{e^{\alpha(x-x')}}{i\alpha+i\beta}$
$= -H(x-x')\frac{e^{-\beta(x-x')}}{\alpha+\beta} - H(x'-x)\frac{e^{\alpha(x-x')}}{\alpha+\beta} =: G_I(x,x')$.
b) Homogene Greensche Funktion: $G_{H1} = e^{-\beta(x-x')}$.
Probe: $\left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha-\beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right)e^{-\beta(x-x')} = (-\beta)^2 e^{-\beta(x-x')} + (\alpha-\beta)\,\beta e^{-\beta(x-x')} - \alpha\beta e^{-\beta(x-x')} = 0$.
Rate: $G_{H2} = e^{\alpha(x-x')}$.
Probe: $\left(\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha-\beta)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right)e^{\alpha(x-x')}$
$\quad = \alpha^2 e^{\alpha(x-x')} - (\alpha-\beta)\,\alpha e^{\alpha(x-x')} - \alpha\beta e^{\alpha(x-x')} = 0$.
c) Beitrag der inhomogenen Greenschen Funktion für $1<x<3$:

$y(x) = \int_1^2 G_I(x,x')f(x')dx' = -\underbrace{\int_1^2 H(x-x')}_{\int_1^x}\frac{e^{-2(x-x')}}{3}2dx' - \underbrace{\int_1^2 H(x'-x)}_{\int_x^2}\frac{e^{x-x'}}{3}2dx'$

$= -\frac{2}{3}\int_1^x e^{-2(x-x')}dx' - \frac{2}{3}\int_x^2 e^{x-x'}dx'$

$= -\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}e^{-2(x-x')}\Big|_{x'=1}^{x} - \frac{2}{3}\ \frac{1}{-1}e^{x-x'}\Big|_{x'=x}^{2}$

$= -\frac{1}{3}\left(1-e^{-2(x-1)}\right) + \frac{2}{3}\left(e^{x-2}-1\right)$

$= \frac{1}{3}e^{2-2x} + \frac{2}{3}e^{x-2} - 1.$

Das erfüllt die Randbedingungen noch nicht:

$y(1) = \frac{1}{3}e^{2-2} + \frac{2}{3}e^{1-2} - 1 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}e^{-1} \neq \frac{1}{e},$

$y(2) = \frac{1}{3}e^{2-4} + \frac{2}{3}e^{2-2} - 1 = \frac{1}{3}e^{-2} - \frac{1}{3} \neq \frac{1}{e^2}.$

Anpassen der Lösung mit Hilfe mit Hilfe zweier beliebiger linear unabhängigen homogenen Lösungen $y_H(x)$:

Wähle z.B. $y_{H1}(x) = G_{H1}(x,1)$ und $y_{H2}(x) = G_{H2}(x,2)$:

$y(x) = \frac{1}{3}e^{2-2x} + \frac{2}{3}e^{x-2} - 1 + AG_{H1}(x,1) + BG_{H2}(x,2)$

$= \frac{1}{3}e^{2-2x} + \frac{2}{3}e^{x-2} - 1 + Ae^{-2x+2} + Be^{x-2}$

$= \left(A+\frac{1}{3}\right)e^{2-2x} + \left(B+\frac{2}{3}\right)e^{x-2} - 1.$

Anpassen an Randbedingungen:

$y(1) = \frac{1}{e} = \left(A+\frac{1}{3}\right) + \left(B+\frac{2}{3}\right)e^{1-2} - 1 = A - \frac{2}{3} + \left(B+\frac{2}{3}\right)e^{-1}.$

$y(2) = \frac{1}{e^2} = \left(A+\frac{1}{3}\right)e^{-2} + \left(B+\frac{2}{3}\right) - 1 = \left(A+\frac{1}{3}\right)e^{-2} + \left(B-\frac{1}{3}\right).$

$A = \frac{2}{3}.$

$B = \frac{1}{3}.$

$\rightarrow y(x) = e^{2-2x} + e^{x-2} - 1$

d) Probe: $y(1) = \frac{1}{e}.$

$y(2) = \frac{1}{e^2}.$

$\frac{d}{dx}y(x) = (-2)e^{2-2x} + e^{x-2}.$

$\frac{d^2}{dx^2}y(x) = 4e^{2-2x} + e^{x-2}.$

$\mathcal{L}_x y(x) = 4e^{2-2x} + e^{x-2} - (-1)\left[-2e^{2-2x} + e^{x-2}\right] - 2\left[e^{2-2x} + e^{x-2} - 1\right] = 2.$