Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:
Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt und Multiple Choice Antwortbogen):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

1. Test, 5. 12. 2014, 2014W

1 Delta-Distribution (30 Punkte)

Berechnen und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; |xy| \, \delta(4 - 3x^2 - 2y^2).$$

2 Koordinatentransformation (40 Punkte)

Die Koordinaten $x'^1 = s$, $x'^2 = t$ seien definiert durch die Parametrisierung

$$\mathbf{x}(s,t) = x^i \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x^1(s,t) \\ x^2(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t/s \end{pmatrix},$$

mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$.

a) Berechnen Sie die lokale, infinitesimale Transformationsmatrix ${a_i}^j$ von kartesischen Koordinaten in die neuen Koordinaten, und mit dessen Hilfe die neuen (nicht normierten, ortsabhängigen) Basisvektoren $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$. [10]

b) Berechnen Sie die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$. [10]

c) Skizzieren Sie die vier Koordinatenlinien $y = 1$, $s = 2$, $s = 3$, sowie $t = 1$ graphisch in ein x-y-Diagramm. Zeichnen Sie für den Punkt $(s,t)^T = (2,1)^T$ die Basisvektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ sowie die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ ein. Beschriften Sie das Diagramm vollständig. [10]

d) Berechnen Sie div$\mathbf{E}(x,y)$, wobei $E'^i = E'^i(s,t) = (1,2)^T$. [10]

Hinweis: Die kovarianten Basisvektoren transformieren wie $\mathbf{e}'_i = {a_i}^j \mathbf{e}_j$, die kontravarianten Vektorkomponenten wie $dx^j(\mathbf{x}) = {a_i}^j(\mathbf{x}) dx'^i(\mathbf{x})$, mit ${a_i}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$.

BITTE WENDEN

3 Multiple Choice Fragen - Gruppe B (30 Punkte)

(2 Punkte pro Frage)

Überprüfen Sie, dass die richtige Gruppe auf dem Antwortbogen angekreuzt ist!

A ☐ B ☒ C ☐ D ☐ E ☐ F ☐

Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dx$ für folgende Integranden:

1) $x^2\,\delta(x-2)$	a) 4	b) -2	c) 2	d) anders	e) -4
2) $\delta(x)H(x+1)$	a) anders	b) 1	c) -1	d) 0	e) 2
3) $x^2\delta(x^2+1)$	a) 1	b) anders	c) -i	d) i	e) 0

$\mathbf{E_x}$ und $\mathbf{E_y}$ seien Projektoren zu den *normierten* Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, für die gilt: $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = c$. Vereinfachen Sie folgende (Kommutator-)Ausdrücke:

4) $(\mathbf{E_x}+\mathbf{E_x^2})\,\mathbf{x}$	a) anders	b) $2\mathbf{x}$	c) $8\mathbf{x}$	d) $\mathbf{x}$	e) $4\mathbf{x}$
5) $\mathbf{y}^T[\mathbf{E_x},\mathbf{E_y}]\mathbf{x}$	a) $c-c^2$	b) anders	c) c^2-c	d) c^3-c	e) $c-c^3$

Berechnen Sie für einen 3-dimensionalen Raum:

6) $\delta_i^k\delta_k^i$	a) 9	b) 1	c) 27	d) 3	e) anders
7) $\delta_i^k\delta_m^m\delta_k^i$	a) 3	b) 27	c) anders	d) 9	e) 1
8) $g^{ij}\,(g_{ij}-g_{ji})$	a) 27	b) anders	c) 1	d) 9	e) 3
9) $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{abd}\delta_{cd}$	a) -3	b) 6	c) anders	d) -6	e) 3

Berechnen Sie mit $r = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \neq 0$ und $\mathbf{p}$ konstant (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik):

10) $\nabla\,(r^2)$	a) anders	b) $\mathbf{x}$	c) $2r\mathbf{x}$	d) $r\mathbf{x}$	e) $2\mathbf{x}$
11) $\nabla\cdot(r\mathbf{p})$	a) $r\mathbf{xp}$	b) $\mathbf{xp}$	c) $\frac{\mathbf{xp}}{r}$	d) anders	e) $2\mathbf{xp}$
12) $\mathbf{x}\cdot\mathrm{grad}\,f(r)$	a) $f'(r)$	b) $2f'(r)$	c) $\frac{f'(r)}{r}$	d) anders	e) $rf'(r)$
13) $\mathrm{rot}\,(\mathbf{p}\times\mathbf{x})$	a) $-\mathbf{p}$	b) anders	c) $-2\mathbf{p}$	d) $3\mathbf{p}$	e) $\mathbf{p}$

Berechnen Sie das Integral $\oint_C \frac{3z^2}{z^3-1}dz$ entlang C_1 (rechter geschlossene Halbkreis, $\mathrm{Re}(z) > 0$, mit Radius $R > 1$) und entlang C_2 (linker geschlossene Halbkreis, $\mathrm{Re}(z) < 0$, mit $R > 1$) in die mathematisch positive Richtung:

14) $C = C_1$	a) $i\pi$	b) $3i\pi$	c) $2i\pi$	d) anders	e) $4i\pi$
15) $C = C_2$	a) anders	b) $i\pi$	c) $3i\pi$	d) $i\pi$	e) $4i\pi$