Name: Tutoriumsgruppe: Matr. Nr.:
Zahl der abgegebenen Blätter (inkl. Deckblatt und Multiple Choice Antwortbogen):

Mathematische Methoden der Theoretischen Physik (UE, 135.044)

2. Test, 23. 1. 2015, 2014W

1 Greensche Funktion (30 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung $\mathcal{L}_x y(x) = f(x)$ wobei der Differentialoperator durch

$$\mathcal{L}_x = \frac{d^2}{dx^2} - 2\frac{d}{dx} + 2$$

gegeben ist.
a) Wie lautet die Fourier-transformierte Greensche Funktion $\tilde{G}(k)$ zum Operator $\mathcal{L}_x$?
b) Finden Sie die Greensche Funktion $G(x, x')$, die die Randbedingungen

$$G(0, x' > 0) = 0\,, \quad \text{und} \quad G'(0, x' > 0) = 0$$

erfüllt ($G'(x, x') = \frac{d}{dx} G(x, x')$).

2 Differentialgleichung (30 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\left(\vec{\nabla}^2 + \frac{2}{x^2 + y^2}\right) \Psi(x, y) = -\lambda \Psi(x, y)\,.$$

a) Führen Sie den Separationsansatz der Differentialgleichung in Polarkoordinaten (r, θ) durch $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ und zeigen Sie, dass die Differentialgleichung in der r-Koordinate durch $r^2 u''(r) + r u'(r) + (\lambda r^2 - A) u(r) = 0$ gegeben ist (A : Konstante).
Hinweis : Laplace-Operator in Polarkoordinaten : $\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
b) Zeigen Sie, dass $r = 0$ ein regulärer singulärer Punkt der Differentialgleichung in r-Koordinate ist.
c) Verwenden Sie den Ansatz $u(r) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k r^{k+\sigma}$ und bestimmen Sie die Koeffizienten w_k wenn $\lambda = A = w_0 = 1$ und $\sigma > 0$.

BITTE WENDEN

3 Multiple Choice Fragen - Gruppe C (40 Punkte)

(4 Punkte pro Frage)

Überprüfen Sie, dass die richtige Gruppe auf dem Antwortbogen angekreuzt ist!

A ☐ B ☐ C ☒ D ☐ E ☐ F ☐

Berechnen Sie die folgenden Integrale :

1) $\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx$

a) anders b) $\frac{3}{4a^2}$ c) $\frac{1}{a^2}$ d) $\frac{3}{8a^2}$ e) $\frac{1}{2a^2}$

2) $\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi P_n(\cos\theta)(13-12\cos\theta)^{-1/2}\sin\theta d\theta$

a) $(2/3)^n$ b) $12^{n/2}$ c) anders d) $12^{-n/2}$ e) $2^n/3^{n+1}$

Formen Sie die Differentialgleichung $(1-x^2)y''(x)-2xy'(x)=\lambda y(x)$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\frac{d}{dx}\left(p_A(x)\frac{d}{dx}\right)y(x)=\lambda\rho_A(x)y(x)$ um :

3) $p_A(x)$

a) $\ln(x)-\frac{x^2}{2}$ b) $1-x^2$ c) $xe^{-x^2/2}$ d) $\ln(1-x^2)$ e) anders

4) $\rho_A(x)$

a) anders b) $(1-x^2)^{-1}$ c) 1 d) 0 e) x

Formen Sie die Differentialgleichung $y''(x)-2xy'(x)=\lambda y(x)$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt $\frac{d}{dx}\left(p_B(x)\frac{d}{dx}\right)y(x)=\lambda\rho_B(x)y(x)$ um :

5) $p_B(x)$

a) $-2/x$ b) $-x^2$ c) e^{-x^2} d) anders b) x^{-2}

6) $\rho_B(x)$

a) x^2 b) 1 c) anders d) e^{-x^2} e) $1/x^2$

Berechnen Sie die folgenden speziellen Funktionen :

7) $\Gamma(4)$

a) 1 b) 2 c) 6 d) anders e) 24

8) $\Gamma(5/2)$

a)$(15/8)\sqrt{\pi}$ b)$\sqrt{\pi}$ c) anders d)$\sqrt{\pi}/2$ e)$(3/4)\sqrt{\pi}$

9) $|\Gamma(1+i)|^2$

a)$\frac{2i\pi}{e^\pi+e^{-\pi}}$ b)$-\frac{2\pi}{e^\pi-e^{-\pi}}$ c)$\frac{2i\pi}{e^{i\pi}+e^{-i\pi}}$ d) anders e)$\frac{2\pi}{e^\pi-e^{-\pi}}$

10) $L_0^1(x)$

a)anders b) $1-x$ c) $2-x$ d) 1 e) 0

Hinweise

Eigenschaften der Gammafunktion : $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$,
$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$, $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

Eigenschaften der Legendre-Polynome : $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$,
$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx=\delta_{nm}2/(2n+1)$, $(1-2tx+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^\infty t^n P_n(x)$

Definition der zugeordneten Laguerre-Polynome : $L_n^\ell(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\frac{(n+\ell)!}{(\ell+k)!(n-k)!k!}x^k$