10. Tutorium **für 19.12.2014**

10.1 Multiple Choice Fragen

Betrachte die folgende Funktion

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!} x^k \qquad (x > 0)\,.$$

Die Funktion $y_n(t)$ erfüllt die Differentialgleichung

$$x y_n''(x) + (ax + b) y_n'(x) + c y_n(x) = 0\,.$$

a) Bestimme die Konstante a.
b) Bestimme die Konstante b.
c) Bestimme die Konstante c.
d,e,f) Forme die Differentialgleichung in die Sturm-Liouville'sche Gestalt

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) y_n(x) = F(x)$$

um.
d) Bestimme die Funktion $p(x)$.
e) Bestimme die Funktion $F(x)$.
f) Finde die Gewichtsfunktion $\rho(x)$, damit die Eigenfunktionen des Sturm-Liouville'schen Operators $\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)$ orthogonalisiert werden.

10.2 Sturm-Liouville-Problem

Betrachte den Sturm-Liouville'schen Operator

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\,.$$

($p(x)$, $q(x)$: reelle Funktionen im Intervall $[a, b]$)
a) Zeige die folgende Identität

$$\int_a^b \left(\psi(x)\mathcal{L}\varphi(x) - \varphi(x)\mathcal{L}\psi(x)\right) dx = p(x)\left(\psi(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)\frac{d\psi}{dx}\right)\Bigg|_{x=a}^{b}$$

für beliebige Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$.

b) $\phi_n(x)$ ist eine Lösung der Eigenwertgleichung

$$\mathcal{L}\phi_n(x) = \lambda_n \rho(x) \phi_n(x)$$

und erfüllt die Randbedingungen $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$. Zeige, dass der Eigenwert λ_n eine reelle Zahl ist. $\rho(x)$ ist eine reelle positive Gewichtsfunktion im Intervall $[a, b]$.
c) Überprüfe die Orthogonalität der Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ und $\phi_m(x)$ ($\lambda_n \neq \lambda_m$) im Intervall $[a, b]$ bzgl. der Gewichtsfunktion $\rho(x)$.

10.3 Separationsansatz

Gegeben sei eine Differentialgleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2}m_1\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 x_2^2 - \frac{e^2}{|x_1 - x_2|}\right)\Phi(x_1, x_2) = \lambda\Phi(x_1, x_2)\,.$$

a) Transformiere den Operator, $\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, in die Koordinaten $R = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$ und $r = x_1 - x_2$.
b) Führe den Separationsansatz der Differentialgleichung in (R, r)-Koordinaten durch.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a, 2bc, 3a, 3b