10. Tutorium - Lösungen **19.12.2014**

- ANMERKUNG: Jeder ist selber für den sinnvollen Umgang mit Lösungszetteln verantwortlich. Letztendlich geht es darum, was man selber lernt und versteht.

10.1 Multiple Choice Fragen

a,b,c)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!} x^k \qquad \text{(Laguerre-Polynome)}$$

Erste Derivierte :

$$\frac{d}{dx} y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k-1)!k!(n-k)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k-1)!} x^k$$

Zweite Derivierte :

$$\frac{d^2}{dx^2} y_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!} x^{k-1}$$

Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!} x^k + a \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k-1)!k!(n-k)!} x^k$$
$$+ b \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k-1)!} x^k + c \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!} x^k = 0$$

Alle Koeffizienten jedes x^k-Terms müssen null sein.
Koeffizient des x^k-Terms ($1 \leq k \leq n-1$):

$$(-1)^{k+1} \frac{n!}{(k-1)!(k+1)!(n-k-1)!} + a(-1)^k \frac{n!}{(k-1)!k!(n-k)!} + b(-1)^{k+1} \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k-1)!}$$
$$+ c(-1)^k \frac{n!}{(k!)^2(n-k)!} = (-1)^k \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k)!} \left(-k(n-k) + ak(k+1) - b(n-k) + c(k+1)\right)$$
$$= (-1)^k \frac{n!}{k!(k+1)!(n-k)!} \left((a+1)k^2 + (-n+a+b+c)k - bn + c\right)$$

Die Bedingungen, dass für beliebiges k der Koeffizient null ist, ergibt:

$$a+1=0, \quad -n+a+b+c=0, \quad -bn+c=0$$

oder

$$a=-1, b=1, c=n$$

Koeffizient des x^0-Terms : $-bn+c=0$
Koeffizient des x^n-Terms : $(-1)^n \frac{1}{n!}(na+c)=0$
d,e,f)
Differentialgleichung

$$xy_n'' + (1-x)y_n' = -ny_n$$

$a_2(x) = x$, $a_1(x) = 1-x$, $a_0 = 0$, und $f(x) = -ny_n(x)$

Transformation auf Sturm-Liouville Form $\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)y_n(x) = F(x)$

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{1-x}{x}dx\right) = \exp\left(\log(x) - x\right)x = x\,e^{-x}$$

$$F(x) = -p(x)\frac{ny_n}{x} = -ne^{-x}y_n(x) \quad \rightarrow \quad \rho(x) = e^{-x}$$

10.2 Sturm-Liouville Problem

a) Der Integrand :

$$\psi(x)\mathcal{L}\varphi(x) - \varphi(x)\mathcal{L}\psi(x) = \psi(x)\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) + q(x)\varphi(x)\right] - \varphi(x)\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\psi}{dx}\right) + q(x)\psi(x)\right]$$

$$= \psi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) - \varphi(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d\psi}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\psi(x)p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right) - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)p(x)\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\varphi(x)p(x)\frac{d\psi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)p(x)\frac{d\psi}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\psi(x)p(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)p(x)\frac{d\psi}{dx}\right)$$

Integration der beiden Seiten der Gleichung im Intervall $[a, b]$

$$\int_a^b \left(\psi(x)\mathcal{L}\varphi(x) - \varphi(x)\mathcal{L}\psi(x)\right)\,dx = p(x)\left(\psi(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)\frac{d\psi}{dx}\right)\Bigg|_{x=a}^{b}$$

Anmerkung : Diese Gleichungen sind bekannt als

$$\text{Lagrangesche Identität :}\quad \psi(x)\mathcal{L}\varphi(x) - \varphi(x)\mathcal{L}\psi(x) = \frac{d}{dx}\left(\psi(x)p(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)p(x)\frac{d\psi}{dx}\right)$$

$$\text{Greensche Identität :}\quad \int_a^b \left(\psi(x)\mathcal{L}\varphi(x) - \varphi(x)\mathcal{L}\psi(x)\right) = p(x)\left(\psi(x)\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)\frac{d\psi}{dx}\right)\Bigg|_{x=a}^{b}$$

b) Eigenwertgleichung :

$$\mathcal{L}\phi_n(x) = \lambda_n\rho(x)\phi_n(x)$$

Zuerst nehmen wir an, dass der Eigenwert eine komplexe Zahl wäre. Die komplexe Konjugation der Eigenwertgleichung ist

$$\mathcal{L}\bar{\phi}_n(x) = \bar{\lambda}_n\rho(x)\bar{\phi}_n(x)$$

Aus dem Ergebnis von Bsp.a (Ersetzungen : $\varphi(x) \rightarrow \phi_n(x)$, $\psi(x) \rightarrow \bar{\phi}_n(x)$)

$$p(x)\left(\bar{\phi}_n(x)\phi_n'(x) - \phi_n(x)\bar{\phi}_n'(x)\right)\Big|_{x=a}^{b} = \int_a^b \left(\bar{\phi}_n(x)\mathcal{L}\phi_n(x) - \phi_n(x)\mathcal{L}\bar{\phi}_n(x)\right)dx = (\lambda_n - \bar{\lambda}_n)\int_a^b \rho(x)\left|\phi_n(x)\right|^2 dx$$

Mit den Randbedingungen $\phi_n(a) = \phi_n(b) = 0$,

$$(\lambda_n - \bar{\lambda}_n)\underbrace{\int_a^b \rho(x)\left|\phi_n(x)\right|^2 dx}_{>0} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_n = \bar{\lambda}_n$$

λ_n ist eine reelle Zahl.
c) Ähnlich wie in Bsp.b

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_a^b \rho(x)\phi_n(x)\bar{\phi}_m(x)dx = 0$$

Wenn $\lambda_n \neq \lambda_m$ gilt

$$\int_a^b \rho(x)\phi_n(x)\bar{\phi}_m(x)dx = 0.$$

10.3 Separationsansatz

a) Schwerpunktkoordinate : $R = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/(m_1 + m_2)$, Relativkoordinate : $r = x_1 - x_2$
Gesamtmasse : $M = m_1 + m_2$, reduzierte Masse : $\mu = m_1 m_2/M$

$$R = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{m_1}{M} \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{m_2}{M}$$

$$r = x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = -1$$

Erste Ableitung nach x_1

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Phi = \frac{\partial R}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial R}\Phi + \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial r}\Phi = \frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\Phi + \frac{\partial}{\partial r}\Phi$$

Zweite Ableitung nach x_1

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\Phi = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\Phi + \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \left(\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{m_1}{M}\frac{\partial}{\partial R}\Phi + \frac{\partial}{\partial r}\Phi\right) = \left(\frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{m_1}{M}\frac{\partial^2}{\partial R \partial r}\right)\Phi$$

Erste Ableitung nach x_2

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi = \frac{m_2}{M}\frac{\partial}{\partial R}\Phi - \frac{\partial}{\partial r}\Phi$$

Zweite Ableitung nach x_2

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\Phi = \left(\frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{m_2}{M}\frac{\partial^2}{\partial R \partial r}\right)\Phi$$

Transformierter Operator

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m_1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\hbar^2}{2m_1}\left(\frac{m_1^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\frac{m_1}{M}\frac{\partial^2}{\partial R \partial r}\right) + \frac{\hbar^2}{2m_2}\left(\frac{m_2^2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\frac{m_2}{M}\frac{\partial^2}{\partial R \partial r}\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\frac{m_1 + m_2}{M^2}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2}
\end{aligned}$$

b) Inverse Transformation der Koordinaten

$$x_1 = R + \frac{m_2}{M}r\,, \quad x_2 = R - \frac{m_1}{M}r$$

Harmonisches Potential in (R, r)-Koordinaten

$$\frac{1}{2}m_1\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m_2\omega^2 x_2^2 = \frac{1}{2}\omega^2\left(m_1\left(R + \frac{m_2}{M}r\right)^2 + m_2\left(R - \frac{m_1}{M}r\right)^2\right) = \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$$

Differentialgleichung in (R, r)-Koordinaten

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{|r|}\right)\Phi = \lambda\Phi$$

Separationsansatz : $\Phi(x_1(R, r), x_2(R, r)) = u(R)v(r)$

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{|r|}\right)uv = \lambda uv \\
\longrightarrow \quad & -\frac{1}{u}\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 - \frac{1}{v}\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{|r|} = \lambda \\
\longrightarrow \quad & -\frac{1}{u}\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 = a + \frac{\lambda}{2}\,, \quad -\frac{1}{v}\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 - \frac{e^2}{|r|} = -a + \frac{\lambda}{2} \\
\longrightarrow \quad & -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{2}M\omega^2 R^2 u = \left(a + \frac{\lambda}{2}\right)u\,, \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2 v - \frac{e^2}{|r|}v = \left(-a + \frac{\lambda}{2}\right)v
\end{aligned}$$