11. Tutorium **für 9.1.2015**

11.0 Hinweise

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z), \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$
$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ für $\mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Re}(y) > 0$,
$(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$

11.1 Multiple Choice Fragen

a) Forme $|(ix)!|^2$ mit der Hyperbelfunktion um.
b) Forme $\Gamma(n+1/2)$ mit der Doppelfakultät um.
c) Berechne das n-te Moment der Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$\langle v^n \rangle = \int |\vec{v}|^n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/(2kT)} d^3v\,.$$

d) Berechne das Integral ($\beta > 0$)

$$\int_0^\infty \frac{E^{1/2}}{e^{\beta E}-1} dE\,.$$

Hinweis 1 : $e^{-\beta E}/(1-e^{-\beta E}) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n\beta E}$.
Hinweis 2: $\sum_{n=1}^\infty n^{-3/2} \simeq 2.6$
e) Wie lautet die Fourier-transformierte Greensche Funktion $\tilde{G}(k)$ zum Differentialoperator $\mathcal{L}_x = \left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \bar{\alpha}\right)$?
f) Berechne das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(x-x')}}{(k+ia-b)(k-ia-b)} dk\,.$$

($a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$)

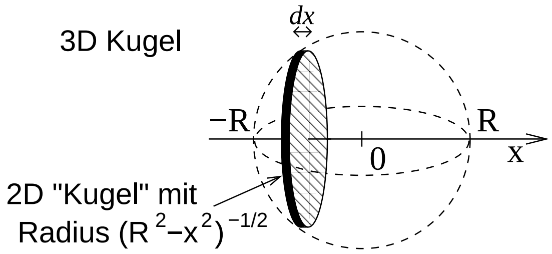
11.2 Gamma- und Beta-Funktionen

$V_n(R)$ sei das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R.
a) Zeige $V_n(R) = R^n V_n(1)$ wobei $V_n(1)$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel ist.
b) Zeige die Rekursionsrelation

$$V_n(R) = RB\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) V_{n-1}(R)$$

wobei $B(x, y)$ die Beta-Funktion ist.

Hinweis: Das Volumen der 3D Kugel ist die Integration der 2D "Kugel" mit Radius $\sqrt{R^2 - x^2}$ nach x.



c) Berechne das Volumen der n-dimensionalen Kugel.
Hinweis : Leite die Rekursionsrelation zwischen $V_n(R)$ und $V_{n-2}(R)$ ab und berechne das Volumen für gerades $n = 2k$ und für ungerades $n = 2k + 1$.

11.3 Fuchssche Klasse

Betrachte die Differentialgleichung

$$x(x-1)y'' + ((1+a+b)x - c)y' + aby = 0$$

a) Untersuche, ob die Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse angehört. Wie lauten die charakteristischen Exponenten σ an der Stelle $x = 0, 1, \infty$?
b) Verwende den Ansatz $y(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} w_\ell x^{\ell+\sigma}$ und zeige, dass die Lösung für die Koeffizienten durch

$$w_\ell = \frac{(\sigma + a)_\ell (\sigma + b)_\ell}{(\sigma + c)_\ell (\sigma + 1)_\ell} w_0$$

gegeben ist.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2c, 3a, 3b