12. Tutorium **für 16.1.2015**

12.0 Hinweise

Eigenschaften der Legendre-Polynome :
$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x,$
$\int_{-1}^{1} P_n(x)dx = 2\delta_{n0},$
$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \delta_{nm}2/(2n+1),$
$(1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$
Definition der zugeordneten Legendrepolynome : $P_\ell^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$
Definition der Kugelflächenfunktionen : $Y_\ell^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)e^{im\phi}$
Definition der zugeordneten Laguerre-Polynome : $L_n^\ell(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+\ell)!}{(\ell+k)!(n-k)!k!}x^k$

12.1 Multiple Choice Fragen

a) Bestimme das Integral

$$\int_{-1}^{1} P_n(\cos\theta)\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}d(\cos\theta)$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ist. ($|\vec{r}_1| > |\vec{r}_2|$)
b) Berechne das Integral

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{Y}_\ell^m(\theta,\phi)Y_0^0(\theta,\phi)Y_\ell^m(\theta,\phi)\sin\theta d\phi d\theta$$

c) Berechne das Integral

$$\int_0^{\infty} r^3\left(2e^{-r}L_0^1(2r)\right)^2\, dr$$

d) Forme die Differentialgleichung $y''(x)+\lambda y(x) = 0$ in die Sturm-Liouville'sche Gestalt

$$\left(\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right)+q(x)\right)y(x) = F(x)$$

um. Finde die Funktion $p(x)$.
e) Finde die Eigenwerte der Differentialgleichung im Bsp.d mit den Dirichlet-Randbedingungen $y(0) = y(L) = 0$.
f) Finde die Eigenwerte der Differentialgleichung im Bsp.d mit den periodischen Randbedingungen $y(0) = y(L)$ und $y'(0) = y'(L)$.

12.2 Legendre-Polynome

a) Zeige für $n \geq 1$ die folgende Relation der Legendre-Polynome

$$
\begin{aligned}
(2n+1)P_n(x)P_n(y) &= (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \\
&\quad -n\frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y} \,.
\end{aligned}
$$

Hinweis: Rekursionsformel $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.
b) Zeige die Christoffel-Darboux-Formel

$$
\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n(x)P_n(y) = \frac{N}{2}\frac{P_N(x)P_{N-1}(y) - P_{N-1}(x)P_N(y)}{x-y}
$$

c) $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ sei die Nullstellen des N-ten Legendre-Polynoms $P_N(x)$. Zeige

$$
\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n(x_i)P_n(x_j) = \frac{1}{w_i}\delta_{ij} \quad \text{mit} \quad w_i = \frac{2}{NP_{N-1}(x_i)P_N'(x_i)}
$$

für $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq N$.
d) Betrachte die folgende Basisfunktionen

$$
f_i(x) = \sqrt{w_i}\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n(x_i)P_n(x) \quad (1 \leq i \leq N) \,.
$$

Berechne das Integral $\int_{-1}^{1} f_i(x)f_j(x)\,dx$.
e) Gegeben sei eine Funktion, die mit den Basisfunktionen $f_i(x)$ entwickelbar ist, d.h. $\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i f_i(x)$. Zeige, dass für die Entwicklungskoeffizienten gilt: $b_i = \sqrt{w_i}\psi(x_i)$.
f) Zeige $\int_{-1}^{1} \psi(x)dx = \sum_{i=1}^{N} w_i\psi(x_i)$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2c, 2d, 2ef

Ein kurzer Ausblick auf zukünftige Semester: In allen Fächern der Physik werden viele Phänomene von Differentialgleichungen beschrieben. Die Eigenschaften der Differentialgleichungen werden im Rahmen des Sturm-Liouville-Problems, des Separationsansatzes, und der Fuchsschen Klasse analysiert und die Greensche Funktion ist eine praktische Methode, um die Lösungen zu finden. Das Eigenwertproblem taucht oft insbesondere in der Quantentheorie (5. Sem) auf. Legendre-Polynome, Delta Distribution, Heaviside Funktion und andere spezielle Funktionen werden in Elektrodynamik (4. Semester) und Quantentheorie wiederkehren. Sie sind wichtige Grundlagen auch für numerische Rechnungen (wie z.B Gauß-Quadratur). Ko- und kontravariante Schreibweise werden in Elektrodynamik I & II für die spezielle Relativitätstheorie gebraucht. Die duale Basis erscheint in Form des reziproken Gitters in der Festkörperphysik (6. Sem). Die Gamma-Funktion wird in Statistischer Physik (6. Sem) eine wichtige Rolle spielen. Somit sollten die "Mathematischen Methoden" eine wichtige Grundlage für künftige theoretische Vorlesungen bieten.