**1. Tutorium** **für 10.10.2014**

## Informationen zu den Übungen

- Die Beispiele sind online in TUWEL bis Freitag, 9:00, anzukreuzen! Eine spätere Änderung der Kreuze ist nicht mehr möglich.
- Kreuze Beispiel 1.1 („Multiple Choice Fragen") in der Kreuzerlliste an, wenn du deine Online-Antworten an der Tafel erklären möchtest. Für das Ausfüllen der Antworten auf die Multiple Choice Fragen online gibt es bis zu 3% Bonus-Punkte.
- Die Anzahl der angekreuzten Beispiele geht in die Endnote ein. Mindestens 50% aller Beispiele müssen angekreuzt werden, aber je mehr, desto besser. Die Tafelleistung wird mit „OK" oder „nicht vorbereitet" bewertet. In letzterem Fall werden alle Kreuze des Tages gestrichen. Zum Bestehen der Übung ist mindestens eine positive Tafelleistung notwendig. Sieh die Übung als gute Gelegenheit, Unklarheiten bei den Beispielen zu klären. Nütze die Gelegenheit, um Fragen zu stellen!
- Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!
- In dieser Übung werden mathematische Grundlagen vermittelt, die später vor allem in „Elektrodynamik" und „Quantentheorie" zur Anwendung kommen, aber auch in anderen Vorlesungen und Übungen nützlich sein werden. Es zahlt sich also aus, von Anfang an eifrig mitzuarbeiten! :)

## 1.1 Multiple Choice Fragen

Beantworte die Multiple Choice Fragen online in TUWEL. Die Fragen müssen spätestens bis Freitag, 9:00 abgegeben werden. Dabei gibt es nur einen Abgabeversuch. Die Zahl der richtigen Lösungen wird mit 3% Bonuspunkten in die Berechnung der Endnote einfließen.

a) Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = b_{ij} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention $a_{ij}b_{jk}$.
b) Berechne mit den selben Matrizen $a_{ij}b_{ik}$.
c) Berechne mit den selben Matrizen $a_{ij}b_{ij}$.
d) Schreibe in Indexschreibweise $\mathbf{ABC}^T\mathbf{D}$ (für allgemeine Matrizen $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$).
e) Schreibe in Matrixform $a_{km}b_{li}c_{ki}d_{lm}$
f) Berechne $\delta_{mm} + 2\delta_{mn}\delta_{nm} + \delta_{mm}\delta_{nn}$ mit dem Kronecker-Delta $\delta_{ij}$ in $d$-Dimensionen.

## 1.2 Aktive und passive Drehung

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eine *aktive Drehung* um den Winkel $\alpha = 30° = \pi/6$ um den Ursprung dreht diesen Punkt im mathematisch positiven Sinn (= gegen den Uhrzeigersinn) zu einem neuen Punkt $\mathbf{x}_{\text{neu}}$.
a) Skizziere die Drehung graphisch und lies die neuen Koordinaten von $\mathbf{x}_{\text{neu}}$ aus der Skizze ab.
b) Gib die Rotationsmatrix $R = R(\alpha)$ an, mit der sich $\mathbf{x}_{\text{neu}} = R\,\mathbf{x}$ berechnen lässt, und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze in etwa übereinstimmt.
c) Eine *passive Drehung* ist die Drehung des Koordinatensystems selbst. Drehe die Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer neuen Skizze graphisch um den selben Winkel $\alpha = \pi/6$ um den Ursprung im mathematisch positiven Sinn, um die neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ zu erhalten. Hierbei bleibt der Punkt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an der selben Stelle auf dem Papier. Lies nun die Koordinaten des Punktes $\mathbf{x}$ bezüglich der neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ab. Dies sind die Koordinaten $\mathbf{x}'$.
d) Durch welche Drehmatrix $S$ kann man die neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1 = S\,\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}'_2 = S\,\mathbf{e}_2$ berechnen? Wie lauten die neuen Basisvektoren? Wie hängen $R$ und $S$ zusammen?
e) Durch welche Drehmatrix $T$ kann man die Koordinaten in der neuen Basis $\mathbf{x}' = T\,\mathbf{x}$ berechnen? Wie lauten die neuen Koordinaten $\mathbf{x}'$? Wie hängen $R$ und $T$ zusammen?
f) Berechne $R(\alpha)T(\alpha)$.

## 1.3 Aktive und passive Skalierung

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eine *aktive Skalierung* um den Faktor $\lambda = 2$ skaliert den Punkt vom Ursprung weg zu einem neuen Punkt $\mathbf{x}_{\text{neu}}$.

a) Skizziere die Skalierung graphisch und lies die neuen Koordinaten von $\mathbf{x}_{\text{neu}}$ aus der Skizze ab.

b) Gib die Skalierungsmatrix $S = S(\lambda)$ an, mit der sich $\mathbf{x}_{\text{neu}} = S\,\mathbf{x}$ berechnen lässt, und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze übereinstimmt.

c) Eine *passive Skalierung* ist die Skalierung des Koordinatensystems selbst. Skaliere die Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in einer neuen Skizze graphisch um den selben Faktor $\lambda = 2$ vom Ursprung weg, um die neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ zu erhalten. Hierbei bleibt der Punkt $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an der selben Stelle auf dem Papier. Lies nun die Koordinaten des Punktes $\mathbf{x}$ bezüglich der neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1$ und $\mathbf{e}'_2$ ab. Dies sind die Koordinaten $\mathbf{x}'$.

d) Durch welche Skalierungsmatrix $U$ kann man die neuen Basisvektoren $\mathbf{e}'_1 = U\,\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}'_2 = U\,\mathbf{e}_2$ berechnen? Wie lauten die neuen Basisvektoren? Wie hängen $S$ und $U$ zusammen?

e) Durch welche Skalierungsmatrix $V$ kann man die Koordinaten in der neuen Basis $\mathbf{x}' = V\,\mathbf{x}$ berechnen? Wie lauten die neuen Koordinaten $\mathbf{x}'$? Wie hängen $S$ und $V$ zusammen?

f) Berechne $S(\lambda)V(\lambda)$.

g) Den Abstand $l$ von $\mathbf{x}$ zum Ursprung kann man über $l = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ berechnen. Im skalierten Koordinatensystem würde man eine andere Länge $l' = \sqrt{\mathbf{x}'^T\mathbf{x}'}$ erhalten. Um auch im skalierten Koordinatensystem die tatsächliche Länge berechnen zu können, kann man eine (in diesem Fall diagonale) Matrix $g = g(\lambda)$ angeben, sodass gilt: $l = \sqrt{\mathbf{x}'^T\, g(\lambda)\, \mathbf{x}'}$. Wie schaut $g(\lambda)$ aus?

---

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2ab, 2c-f, 3ab, 3c-g