1. Tutorium - Lösungen **10.10.2014**

- ANMERKUNG: Es liegt in der Verantwortung des Einzelnen, sich die Beispiele zunächst alleine und ganz ohne Hilfsmittel anzuschauen. Google, Wolfram Alpha, Lösungssammlungen, etc. helfen nur kurzfristig - leider nicht beim Test!

1.1 Multiple Choice Fragen

Vorbemerkung: Beachte, dass hier eine schlampige (aber oft gebräuchliche) Schreibweise verwendet wird: „$\mathbf{A} = a_{ij}$“?

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat in drei Dimensionen neun Einträge: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix lässt sich sauber so darstellen: $(\mathbf{A})_{ij} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{ij}$, also $(\mathbf{A})_{11} = a_{11}$, $(\mathbf{A})_{12} = a_{12}$, etc. Wenn es nur zwei freie Indizes gibt, und auch keine Gefahr der Vertauschung besteht (etwa wegen alphabetischer Reihenfolge der Indizes), wird das zuweilen schlampig verkürzt zu „$\mathbf{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$“.

a) Nebeneinanderstehende Indizes entsprechen einer Matrikmultiplikation (warum?)

$$a_{ij}b_{jk} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}b_{jk} = (\mathbf{AB})_{ik} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{ik} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 16 & 4 & 14 \\ 25 & 7 & 23 \end{pmatrix}_{ik}.$$

b) Vertauschen zweier Indizes entspricht dem Transponieren der entsprechenden Matrix (warum?)

$$a_{ij}b_{ik} = \left(a^T\right)_{ji} b_{ik} = \left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}\right)_{jk} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_{jk} = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 9 \\ 18 & 2 & 12 \\ 21 & 3 & 15 \end{pmatrix}_{jk}$$

c) Summation über beide Indizes entspricht der Spur (warum? $c_{jj} = \sum_{j=1}^{3} c_{jj} = c_{11} + c_{22} + c_{33}$)

$$a_{ij}b_{ij} = \left(a^T\right)_{ji} b_{ij} = \mathrm{Tr}\,\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 15 & 1 & 9 \\ 18 & 2 & 12 \\ 21 & 3 & 15 \end{pmatrix} = 15 + 2 + 15 = 32.$$

d) $\left(\mathbf{ABC}^T\mathbf{D}\right)_{im} = a_{ij}b_{jk}\left(c^T\right)_{kl} d_{lm} = a_{ij}b_{jk}c_{lk}d_{lm} = b_{jk}a_{ij}c_{lk}d_{lm}$.

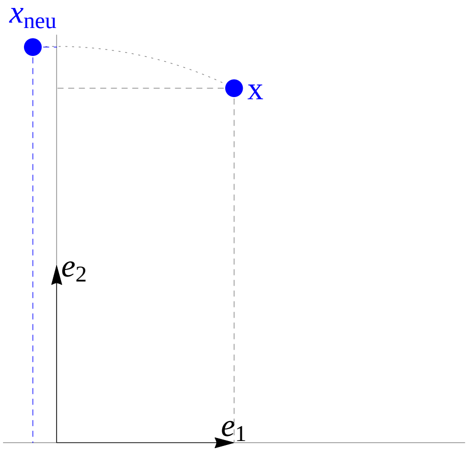
e) $a_{km}b_{li}c_{ki}d_{lm} = \left(a^T\right)_{mk} c_{ki}\left(b^T\right)_{il} d_{lm} = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{CB}^T\mathbf{D}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{DA}^T\mathbf{C}\right)$

f) Kronecker-Delta in d-Dimensionen: Warum ist $\delta_{mm} = d$? Warum ist $\delta_{ab}\delta_{bc} = \delta_{ac}$?

$$\underbrace{\delta_{mm}}_{d} + 2\underbrace{\delta_{mn}\delta_{nm}}_{\delta_{mm}} + \underbrace{\delta_{mm}}_{d}\underbrace{\delta_{nn}}_{d} = d + 2\delta_{mm} + d^2 = 3d + d^2$$

1.2 Aktive und passive Drehung

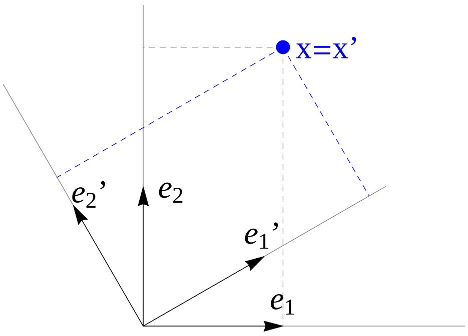
a)



b) $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}_{\text{neu}} = R(\alpha)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.13 \\ 2.23 \end{pmatrix}.$$

c)



d) $S(\alpha) = R(\alpha)$.

$$\mathbf{e}_1' = S\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.87 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{e}_2' = S\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.87 \end{pmatrix}.$$

R und S sind ident.

e) $T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}' = T\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.87 \\ 1.23 \end{pmatrix}$$

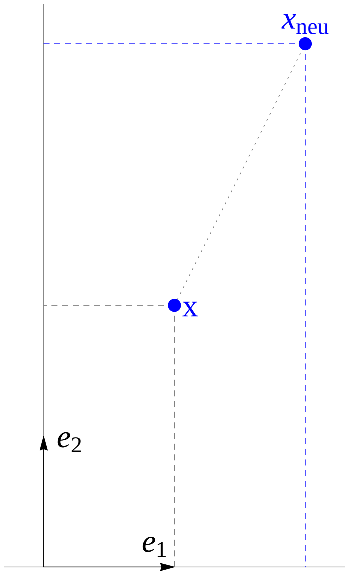
R und T sind inverse zueinander. (Sie sind auch transponiert zueinander).

f) $R(\alpha)T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Aktive und passive Skalierung

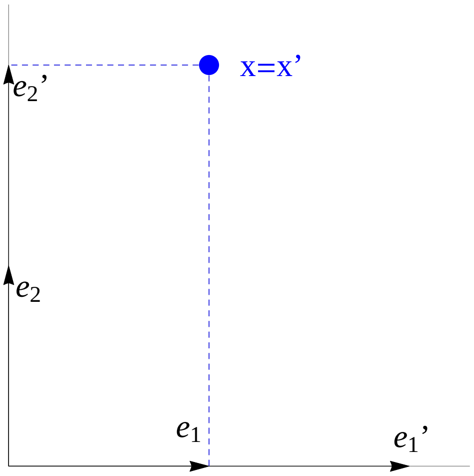
a)



b) $S(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}_{\text{neu}} = S(\lambda)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c)



d) $U(\lambda) = S(\lambda)$.

$\mathbf{e}_1' = U\,\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{e}_2' = U\,\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

e) $V(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$\mathbf{x}' = V\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $S(\lambda)V(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) $l = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

$l' = \sqrt{\mathbf{x}'^T \mathbf{x}'} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$g(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \qquad l = \sqrt{\mathbf{x}'^T \, g(\lambda) \, \mathbf{x}'} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{5}$.