2. Tutorium **für 17.10.2014**

2.1 Multiple Choice Fragen

a) Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a} = a_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = b_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_j b_k$, wobei ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol ist[1].
b) Berechne mit den selben Vektoren $a_i \varepsilon_{ijk} b_k + a_j a_m b_m$.
c) Gegeben sei zusätzlich $\vec{c} = c_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechne $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.
d) Gegeben sei die 3×3-Matrix $\mathbf{A} = a_{ij}$. Schreibe mit Hilfe des Levi-Civita-Symbols die Determinante $\det \mathbf{A}$.
e) Berechne für $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ den Ausdruck $\partial_i x_j$.
f) Berechne den Ausdruck $\partial_i (x_k x_k) + \partial_k (x_i x_k)$ in d Dimensionen.

2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

Gegeben sei ein Punkt mit Koordinaten $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ mit $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodass $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{2} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$. Der selbe Punkt (auf dem Papier) soll nun in der nicht-orthogonalen Basis $\mathcal{B}' = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ mit $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.
a) Skizziere die alte und neue Basis graphisch. Lies die Koordinaten x'^1 und x'^2 von $\mathbf{x}$ in der neuen Basis aus der Skizze ab, für die gilt $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i$.
b) Berechne die Koordinaten x'^i durch Lösung des Gleichungssystems $x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i$ nach den beiden Variablen x'^1 und x'^2, und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze in etwa übereinstimmt. (Führe auch die Probe durch: $x'^i \mathbf{f}_i = x^i \mathbf{e}_i = \mathbf{x}$).
c) Durch welche Transformationsmatrix $\mathbf{A}$ wird die alte Basis in die neue transformiert, also $\mathbf{f}_i = \mathbf{A} \mathbf{e}_i$?

[1] Siehe Kapitel 5.12 im Vorlesungsskriptum.

d) Berechne die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und zeige, dass sich die Komponenten x'^i über $\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ berechnen lassen[2].

2.3 Duale Basis (Fortsetzung von 2.2)

a) Die duale Basis $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{f}_1^*, \mathbf{f}_2^*\} := \{\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2\}$ wird über $[\mathbf{f}_i^*, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}_i^* \cdot \mathbf{f}_j = \delta_{ij}$ bzw. $[\mathbf{f}^i, \mathbf{f}_j] = \mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ definiert. (Wir verwenden hier ein Skalarprodukt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ zwischen dualen und normalen Basisvektoren. Es gilt $\delta_{ij} = \delta^i_j = 1$ für $i = j$ und 0 sonst.) Schreibe die vier Gleichungen $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ separat auf (für $i = 1$, $j = 1$; dann für $i = 1$, $j = 2$; etc.) und erkläre jede davon in Worten. (z.B. „... muss orthogonal auf ... sein.“, „Das Skalarprodukt zwischen ... und ... muss 1 ergeben“.)
b) Bestimme anhand der Einschränkungen aus Punkt 2.3a durch geometrische Konstruktion die Richtungen (zwar noch ohne genaue Länge, aber schon ob „vor“ oder „zurück“), in die die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ zeigen müssen. (Als Basisvektoren $\mathbf{f}_1$ und $\mathbf{f}_2$ sind die aus Beispiel 2.2 zu nehmen).
c) Berechne die duale Basis $\mathcal{B}^*$ durch Matrixinversion, und überprüfe, dass $\mathbf{f}^i \cdot \mathbf{f}_j = \delta^i_j$ für alle Kombinationen von i und j gilt.
d) Zeichne die dualen Basisvektoren $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ ein, und überprüfe, ob die Richtung aus 2.3b gestimmt hat.
e) Lies die zur dualen Basis gehörenden Koordinaten x'_1 und x'_2 vom Punkt $\mathbf{x}$ aus Beispiel 2.2 aus der Skizze ab, für die gilt $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'^i\mathbf{f}_i = x'_i\mathbf{f}^i$.
f) Berechne die zur dualen Basis gehörenden Koordinaten x'_1 und x'_2 durch Lösen des Gleichungssystems $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i = x'_i\mathbf{f}^i$ (oder durch Invertieren und Anwenden einer geeigneten Transformationsmatrix), und überprüfe, ob das Resultat mit der Skizze in etwa übereinstimmt.
g) Berechne den Abstand über $l = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ und vergleiche mit $l' = \sqrt{x'^i x'_i}$.
h) (Zum Nachdenken) Wie lassen sich die Längen von $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ in Punkt 2.3b geometrisch (d.h. nur mit Zirkel und Lineal) konstruieren?

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-d, 3a-d, 3e-g, 3h

[2] Daher folgt auch die Sprechweise, dass die „KOvarianten Basisvektoren“ MIT der Transformationsmatrix A transformieren, wohingegen die „KONTRAvarianten Vektorkomponenten“ GEGEN die Transformationsmatrix A (oder MIT der Inversen A^{-1}) transformieren.