2. Tutorium - Lösungen **17.10.2014**

- ANMERKUNG: Es bringt am meisten, sich die Beispiele zunächst ohne Lösungshilfe durchzudenken und zu schauen, wie weit man ohne Hilfe kommt!
- Wenn man auf den Lösungszettel zurückgreift, dann schauen, ob man wirklich jeden Schritt verstanden hat. Warum komme ich von da nach da? Was bedeutet das genau? Würde ich es genauso machen? Wenn ja, warum habe ich den Lösungszettel dann überhaupt gebraucht? Wenn nein, was genau hatte ich nicht verstanden oder gewusst?
- Wenn was unklar bleibt, bitte im nächsten Tutorium nachfragen! Dazu sind die Tutorien ja auch da!

2.1 Multiple Choice Fragen

Vorbemerkung: Beachte, dass hier eine schlampige (aber oft gebräuchliche) Schreibweise verwendet wird: „$\vec{a} = a_i$"?

Der Vektor hat drei Komponenten: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Die i-te Komponente des Vektors lässt sich sauber so darstellen:$(\vec{a})_i = a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_i$, also $(\vec{a})_1 = a_1$, $(\vec{a})_2 = a_2$, etc. Wenn es nur einen freien Index gibt, wird das zuweilen schlampig verkürzt zu „$\vec{a} = a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$".

a) Wieso gilt der Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Levi-Civita-Symbol?

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)_i = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_i .$$

b) Wieso gilt $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$ [zyklische Vertauschung ändert nichts] und $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ [Vertauschung zweier Indizes ändert Vorzeichen]?

Erster Teil:

$$a_i \varepsilon_{ijk} b_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_k = -\varepsilon_{jik} a_i b_k = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_j = -\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)_j = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_j .$$

Zweiter Teil:

$$a_j a_m b_m = a_j \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left[\vec{a}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\right]_j = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]\right\}_j = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} 16\right]_j = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 48 \end{pmatrix}_j$$

Summe:

$$a_i \varepsilon_{ijk} b_k + a_j a_m b_m = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 51 \end{pmatrix}_j$$

c) $\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = c_k \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_k = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -1.$

d) $\det \mathbf{A} = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$.

e) $\partial_i x_j = \frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$. Unabhängige Variablen x_i, z.B. $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Somit gilt $\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$. $\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$. Generell: $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$.

(Anmerkung: falls ko- und kontravariante Indizes unterschieden werden, gilt $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ und $\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.)

f) Anwenden der Produktregel:

$\partial_i (x_k x_k) + \partial_k (x_i x_k)$

$= (\partial_i x_k) x_k + x_k (\partial_i x_k) + (\partial_k x_i) x_k + x_i (\partial_k x_k)$

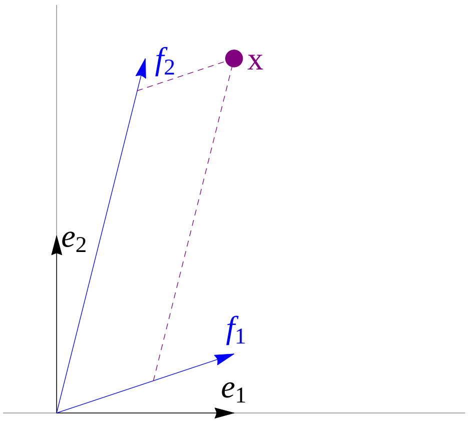
$= \delta_{ik} x_k + x_k \delta_{ik} + \delta_{ki} x_k + x_i \delta_{kk}$

$= x_i + x_i + x_i + x_i \delta_{kk}$

$= 3x_i + dx_i = (3 + d) x_i.$

2.2 Transformation auf nicht-orthogonale Basis

a)



b) Lösen von $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'^i \mathbf{f}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x'^1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + x'^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ (Gleichungssystem mit 2 Variablen) liefert:

$x'^1 = \frac{6}{11} \approx 0,55$, $x'^2 = \frac{10}{11} \approx 0,91$.

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{6}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}.$$

2.3 Duale Basis (Fortsetzung von 2.2)

a)

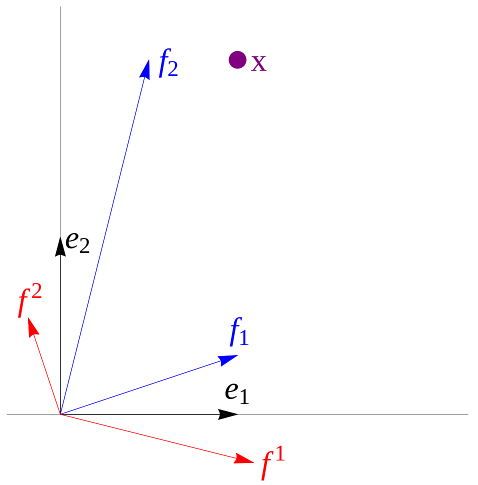
$\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_1 = \delta^1_1 = 1$: „Das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}_1$ muss 1 ergeben“ .

$\mathbf{f}^1 \cdot \mathbf{f}_2 = \delta^1_2 = 0$: „$\mathbf{f}^1$ muss orthogonal auf $\mathbf{f}_2$ sein.“

$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_1 = \delta^2_1 = 0$: „$\mathbf{f}^2$ muss orthogonal auf $\mathbf{f}_1$ sein.“

$\mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{f}_2 = \delta^2_2 = 1$: „Das Skalarprodukt zwischen $\mathbf{f}^2$ und $\mathbf{f}_2$ muss 1 ergeben“ .

b)



c) Basisvektoren in Spalten: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \left(\boxed{\begin{matrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{matrix}} \right)$.

Duale Basisvektoren aus Zeilen von $\mathbf{B}^{-1}$ ablesen:

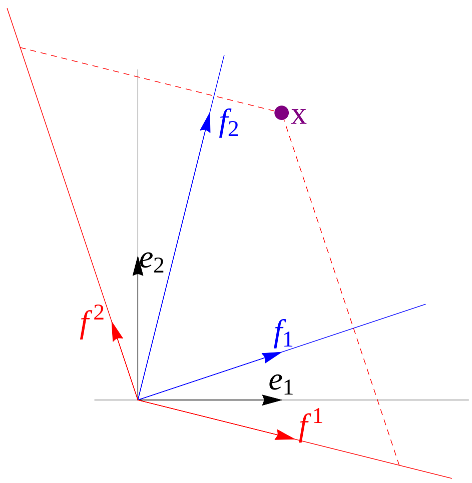
$\mathbf{B}^{-1} = \left(\begin{matrix} \boxed{\frac{12}{11} \quad -\frac{3}{11}} \\ \boxed{-\frac{2}{11} \quad \frac{6}{11}} \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix}$. Daher: $\mathbf{f}^1 = \begin{pmatrix} \frac{12}{11} & , -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} & , \frac{6}{11} \end{pmatrix}$.

Probe:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{f}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^1\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^1\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}^2\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}^2\mathbf{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^1_1 & \delta^1_2 \\ \delta^2_1 & \delta^2_2 \end{pmatrix}$.

d) siehe (b).

e)



f) Berechnung über $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x'_i \mathbf{f}^i \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x'_1 \begin{pmatrix} \frac{12}{11} \\ -\frac{3}{11} \end{pmatrix} + x'_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$. Lösung des Gleichungssystems liefert: $x'_1 = \frac{5}{3}$; $x'_2 = \frac{9}{2}$.

Alternative Berechnung über $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,67 \\ 4,5 \end{pmatrix}$.

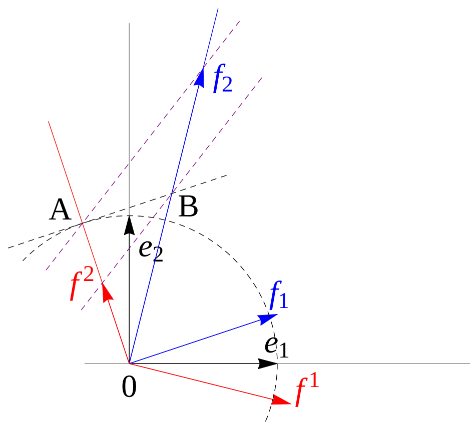
(Im Euklidischen Raum fallen Basen und duale Basen zusammen und es gilt $x^1 = x_1$, $x^2 = x_2$).

g) $l = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

$l' = \sqrt{x'^i x'_i} = \sqrt{x'_i x'^i} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{11} \\ \frac{10}{11} \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{6}{11} + \frac{9}{2}\frac{10}{11}} = \sqrt{\frac{55}{11}} = \sqrt{5}$.

Man erhält die gleiche Länge, unabhängig von der Wahl einer Basis.

h)



In Richtung von $\mathbf{f}^2$ die Länge 1 auftragen (Punkt A), von dort eine Normale zeichnen und mit $\mathbf{f}_2$ schneiden (Punkt B). Das Skalarprodukt von $\mathbf{a} := \overline{0\mathrm{A}}$ und $\mathbf{b} := \overline{0\mathrm{B}}$ ist per Konstruktion $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$. Um die Länge $|\mathbf{f}^2|$ zu finden, wende man den Strahlensatz an: $|\mathbf{f}_2| : |\mathbf{b}| = |\mathbf{a}| : |\mathbf{f}^2|$. Somit ist $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = |\mathbf{f}_2||\mathbf{f}^2|$ und mit dem Winkel φ zwischen $\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}$ (bzw. zwischen $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}^2$) gilt $1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi = |\mathbf{f}_2||\mathbf{f}^2| \cos\varphi = \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{f}^2 = 1$.
Wenn man möchte, lässt sich das alles nur mit Zirkel und Lineal konstruieren (Normale zu einer Geraden durch einen Punkt erhält man folgendermaßen: Vom Punkt aus einen Kreis zeichnen, der die Gerade 2x schneidet. Von den Schnittpunkten zwei gleich große Kreise zeichnen, die sich 2x schneiden. Die Gerade durch diese 2 Punkte ist normal auf die ursprüngliche Gerade. Eine Normale zur Normalen ergibt dann eine Parallele.)