3. Tutorium **für 24.10.2014**

3.1 Multiple Choice Fragen

a) Gegeben sei ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Wie lautet der zugehörige Projektor $\mathbf{E}_{\vec{x}}$?
b) Berechne damit $\mathbf{E}_{\vec{x}}^2$.
c) Berechne $\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\left(\mathbf{1} + \mathbf{E}_{\vec{x}}\right)^3 \vec{x}$.
d) Berechne den Kommutator von Pauli-Matrizen $[\sigma_1, \sigma_2]$.
e) Berechne $[\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2]$.
f) Berechne $\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}\right)$ mit $\mathbf{p}$ konstant und $r = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$.

3.2 Levi-Civita Symbol

Das Epsilon-Symbol (Levi-Civita Symbol) ist folgendermaßen definiert:

$$\varepsilon_{ijk\ldots} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i,j,k,\ldots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\ldots) \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ durch repräsentatives Einsetzen von Zahlen in die Indizes (Einsteinsche Summenkonvention beachten!).
b) Zeige, dass $\varepsilon_{ij\ldots} = -\varepsilon_{ji\ldots}$.
c) Zeige, dass $\varepsilon_{ijk}a_i a_j = 0$.
(Hinweis: Die Indizes lassen sich beliebig umbenennen: $\varepsilon_{ijk}a_i a_j = \varepsilon_{lmk}a_l a_m = \varepsilon_{jik}a_j a_i$.)
d) Zeige in Indexschreibweise, dass $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$.
e) Zeige in Indexschreibweise, dass für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ in einer dreidimensionalen, orthonormalen Basis mit euklidischer Metrik[1] gilt: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 + |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$.

[1] Für eine euklidische Metrik mit orthonormalen Basen braucht nicht zwischen unteren und oberen Indizes unterschieden zu werden, da Basisvektoren und duale Basisvektoren zusammen fallen (man kann es aber natürlich weiterhin tun).

3.3 Reziprokes Gitter

Gegeben sei ein Kristallgitter mit Basis $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\right\}$. Die Basisvektoren des reziproken Gitters[2] $\vec{b}^1$, $\vec{b}^2$, $\vec{b}^3$ sind einfach die Basisvektoren des Dualraumes $\mathcal{B}^*$, wobei sie (je nach Konvention) mit einem Faktor 2π multipliziert werden. Im Folgenden wird angenommen: $\vec{b}^i = 2\pi \vec{f}^i$.

a) Welcher Zusammenhang gilt zwischen $\vec{f}^i$ und $\vec{f}_j$? Welcher zwischen $\vec{b}^i$ und $\vec{a}_j$? Schreibe die drei Gleichungen, in denen $\vec{b}^2$ vorkommt, auf und erkläre jede davon in Worten.

b) Gib an, wie sich die Basisvektoren des reziproken Gitters $\vec{b}^i$ unter Verwendung von Kreuzprodukt und Skalarprodukt mit Hilfe der in (a) bestimmten Bedingungen aus den Basisvektoren $\vec{a}_j$ berechnen lassen.

c) Das Volumen V der primitiven Einheitszelle des Kristallgitters ist gegeben durch $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$, das des reziproken Gitters durch $V^* = \vec{b}^1 \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right)$. Zeige, dass $V^* = \frac{(2\pi)^3}{V}$ gilt.

d) Zeige, dass das reziproke Gitter des reziproken Gitters wieder aus den ursprünglichen Basisvektoren besteht.

e) Gegeben sei eine hexagonale Kristallstruktur mit der Basis $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right\}$. Berechne die Basis des reziproken Gitters wie in (b) angegeben. Skizziere Basis und reziproke Gitterbasis in der x-y-Ebene.

f) Berechne die Basis des reziproken Gitters durch Matrixinversion, also wie in (a) angegeben.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2de, 3a-d, 3ef

[2] Das reziproke Gitter wird in der Kristallographie bei der Beschreibung von Beugung an Kristallen verwendet und wird in „Materialwissenschaften“ und in der „Festkörperphysik“ wieder auftauchen.