**3. Tutorium - Lösungen** **24.10.2014**

- ANMERKUNG: Es geht im Allgemeinen nicht darum, die Lösung in den Händen zu halten. Die bekommt man rasch irgendwo her. Viel wertvoller ist, die Lösung selber verstanden zu haben! Noch wertvoller ist, selber draufgekommen zu sein!

## 3.1 Multiple Choice Fragen

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $\mathbf{E}_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\otimes\vec{x}^T}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} aa & ab \\ ba & bb \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{E}_{\vec{x}}^2 = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(a^2+b^2)^2}\begin{pmatrix} a^2\left(a^2+b^2\right) & ab\left(a^2+b^2\right) \\ ab\left(a^2+b^2\right) & b^2\left(a^2+b^2\right) \end{pmatrix} = \mathbf{E}_{\vec{x}}$.

c) Eigenschaft des Projektors: $\mathbf{E}_{\vec{x}}\vec{x} = \vec{x}$ (nachrechnen!)

$\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\left(\mathbf{1} + \mathbf{E}_{\vec{x}}\right)^3 \vec{x} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\left(\mathbf{1} + \mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\left(\mathbf{1} + \mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\underbrace{\left(\mathbf{1} + \mathbf{E}_{\vec{x}}\right)\vec{x}}_{\vec{x}+\vec{x}=2\vec{x}} = \left(\mathbf{1} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_{\vec{x}}\right)8\vec{x} = (1-\frac{1}{2})8\vec{x} = 4\vec{x} = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix}$.

d) $\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$.

$\sigma_2\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i\sigma_3$.

$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 = i\sigma_3 + i\sigma_3 = 2i\sigma_3$.

Anmerkung: allgemein gilt: $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

e) Für Kommutatoren gilt: $[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + [\mathbf{A}, \mathbf{C}]$. Somit:

$[\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_1 + \sigma_2] = \underbrace{[\sigma_1, \sigma_1]}_{0} - \underbrace{[\sigma_2, \sigma_1]}_{-2i\sigma_3} + \underbrace{[\sigma_1, \sigma_2]}_{2i\sigma_3} - \underbrace{[\sigma_2, \sigma_2]}_{0} = 4i\sigma_3$.

f) $\nabla\left(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{r^5}\right) \to \partial_i\left(\frac{p_j x_j}{r^5}\right) = p_j\frac{1}{r^5}\underbrace{\left(\partial_i x_j\right)}_{\delta_{ij}} + p_j x_j\underbrace{\left(\partial_i\frac{1}{r^5}\right)}_{-\frac{5}{r^6}\partial_i r} = p_j\frac{1}{r^5}\delta_{ij} - p_j x_j\frac{5}{r^6}\frac{x_i}{r} = \frac{p_i}{r^5} - \frac{5x_i p_j x_j}{r^7} \to \frac{\mathbf{p}}{r^5} - \frac{5\mathbf{x}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})}{r^7}$.

## 3.2 Levi-Civita Symbol

a) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$

Einsetzen: falls $i$, $j$, $k$ und $k$, $l$, $m$ jeweils paarweise verschieden sind: In der Summe über $k$ trägt links nur 1 Term bei.

Falls $i$, $j$, und $k$ eine gerade Permutation von $l$, $m$, $k$ ist ergibt sich $+1$, z.B.:

$i=1$, $j=2$, $l=1$, $m=2$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1\cdot 1 = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 1-0 = 1$.

Falls $i$, $j$, und $k$ eine ungerade Permutation von $l$, $m$, $k$ ist ergibt sich -1, z.B.:

$i=1$, $j=2$, $l=2$, $m=1$: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = 1\cdot(-1) = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} = 0-1 = -1$.

(Zyklisches Vertauschen ändert weder links noch rechts etwas am Ergebnis).

Falls $i$ und $j$ ident sind, ergibt sich links 0 und rechts

$\delta_{il}\delta_{im} - \delta_{im}\delta_{il} = 0$ (ohne Einsteinsche Summenkonvention).

b) Vertauschung der ersten beiden Indizes vertauscht die Permutation.

Falls $\varepsilon_{ij\ldots} = 0$, dann ist auch $\varepsilon_{ij\ldots} = 0$.

Falls $\varepsilon_{ij\ldots} = \pm 1$, dann ist $\varepsilon_{ji\ldots} = \mp 1$. Also ist die Relation erfüllt.

c) $\varepsilon_{ijk}a_i a_j = \varepsilon_{lmk}a_l a_m = \varepsilon_{jik}a_j a_i = -\varepsilon_{ijk}a_j a_i = -\varepsilon_{ijk}a_i a_j \to 2\times\varepsilon_{ijk}a_i a_j = 0$.

Zuerst wurden die Indizes einfach umbenannt, dann die Relation aus Aufgabe b) verwendet, und $a_j a_i = a_i a_j$ vertauscht, da die Reihenfolge von Zahlen egal ist. Zum Schluss wurde auf beiden Seiten $\varepsilon_{ijk}a_i a_j$ addiert.

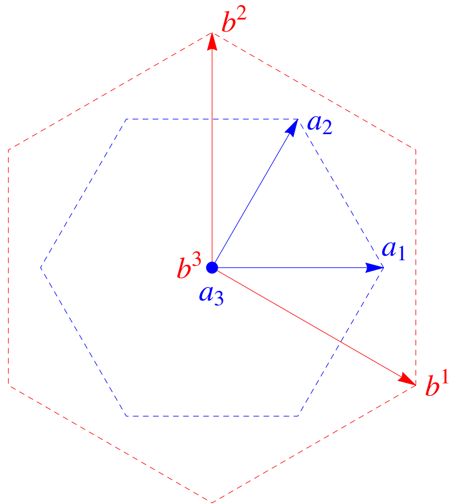
d) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = a_i \varepsilon_{jki} b_j c_k = b_j \varepsilon_{jki} c_k a_i = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$. (Zyklisches Vertauschen: $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$)
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = c_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = -a_i \varepsilon_{ikj} b_j c_k = -a_i \varepsilon_{ikj} c_k b_j = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$.
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_i \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \varepsilon_{ijk} b_j c_k a_i = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.
e) Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$, und $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$. Weiters: $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = a_i b_i a_j b_j + \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} a_l b_m = a_i b_i a_j b_j + (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j b_k a_l b_m =$
$a_i b_i a_j b_j + a_j a_j b_k b_k - a_j b_k a_k b_j = a_j a_j b_k b_k = (\vec{a} \cdot \vec{a})\left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$.

## 3.3 Reziprokes Gitter

a) $\vec{f}^i \cdot \vec{f}_j = \delta^i_j$.
$\vec{b}^i \cdot \vec{a}_j = \left(2\pi \vec{f}^i\right) \cdot \vec{f}_j = 2\pi \delta^i_j$.
$\vec{b}^2 \cdot \vec{a}_1 = 0$, $\vec{b}^2 \cdot \vec{a}_3 = 0$. „$\vec{b}^2$ steht normal auf $\vec{a}_1$ und auf $\vec{a}_3$“.
$\vec{b}^2 \cdot \vec{a}_2 = 2\pi$. „Das Skalarprodukt zwischen $\vec{b}^2$ und $\vec{a}_1$ muss $2\pi$ ergeben“.
b) z.B. $\vec{b}^2$ normal auf $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_3$ $\rightarrow \vec{b}^2 = c\, \vec{a}_1 \times \vec{a}_3$, mit zu bestimmender Konstante $c$.
Skalarprodukt ergibt $2\pi$: $\vec{b}^2 \cdot \vec{a}_2 = 2\pi$. $\rightarrow c\, (\vec{a}_1 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_2 = 2\pi \rightarrow c = \frac{2\pi}{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_2}$.
$\rightarrow \vec{b}^2 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_3}{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_2} = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{a}_2}$.
Ähnlich findet man:
$\vec{b}^1 = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_1}$, $\vec{b}^2 = 2\pi \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \cdot \vec{a}_2}$, $\vec{b}^3 = 2\pi \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3}$.
c) $V^* = \vec{b}^1 \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right) = 2\pi \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \vec{a}_1} \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right) = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right)$
Nebenrechnung: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m = (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl})\, a_j b_k c_l d_m$
$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$.
$$\rightarrow V^* = \frac{2\pi}{V} (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right) = \frac{2\pi}{V} \left[ \underbrace{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}^2\right)}_{=2\pi} \underbrace{\left(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}^3\right)}_{=2\pi} - \underbrace{\left(\vec{a}_2 \cdot \vec{b}^3\right)}_{=0} \underbrace{\left(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}^2\right)}_{=0} \right] = \frac{(2\pi)^3}{V}.$$
Alternative Lösungsmöglichkeit:
$$V = \det \begin{bmatrix} \vec{a}^1 & \vec{a}^2 & \vec{a}^3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \left(\vec{a}^1\right)^T \\ \left(\vec{a}^2\right)^T \\ \left(\vec{a}^3\right)^T \end{bmatrix},\ V^* = \det \begin{bmatrix} \vec{b}^1 & \vec{b}^2 & \vec{b}^3 \end{bmatrix}. \text{ Wegen } \begin{bmatrix} \left(\vec{a}^1\right)^T \\ \left(\vec{a}^2\right)^T \\ \left(\vec{a}^3\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}^1 & \vec{b}^2 & \vec{b}^3 \end{bmatrix} =$$
$$2\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt auch } \det \left\{ \begin{bmatrix} \left(\vec{a}^1\right)^T \\ \left(\vec{a}^2\right)^T \\ \left(\vec{a}^3\right)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{b}^1 & \vec{b}^2 & \vec{b}^3 \end{bmatrix} \right\} = \det \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad VV^* = (2\pi)^3.$$
d) Ein Basisvektor des reziproken Gitters zum reziproken Gitter ist gegeben durch:
$\vec{c}_1 = 2\pi \frac{\vec{b}^2 \times \vec{b}^3}{\vec{b}^1 \cdot \left(\vec{b}^2 \times \vec{b}^3\right)} = 2\pi \frac{\vec{b}^2 \times \vec{b}^3}{V^*} = (2\pi)^2\, \frac{(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \times \vec{b}^3}{V^* V}$.
Nebenrechnung: $\left[\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}\right]_i = \varepsilon_{ijk} \left(\varepsilon_{jlm} a_l b_m\right) c_k = (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})\, a_l b_m c_k = a_k c_k b_i - b_k c_k a_i$
$= \left[(\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}\right]_i$
$$\rightarrow \vec{c}_1 = \frac{(2\pi)^2}{V^* V} (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) \times \vec{b}^3 = \frac{(2\pi)^2}{V^* V} \left[ \underbrace{\left(\vec{a}_3 \cdot \vec{b}^3\right)}_{=2\pi} \vec{a}_1 - \underbrace{\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{b}^3\right)}_{=0} \vec{a}_3 \right] = \frac{(2\pi)^3}{V^* V} \vec{a}_1 = \vec{a}_1.$$
Analog für $\vec{c}_2 = \vec{a}_2$ und $\vec{c}_3 = \vec{a}_3$.
$$\text{e) } V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} c \\ -\frac{ac}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{a^2 c\sqrt{3}}{2}.$$
$$\vec{b}^1 = \frac{2\pi}{V} \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{ac\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{ac}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{a} \\ -\frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}^2 = \tfrac{2\pi}{V}\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 = \tfrac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ ac \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b}^3 = \tfrac{2\pi}{V}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \tfrac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \tfrac{4\pi}{a^2 c\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{c} \end{pmatrix}.$$




f) $\mathcal{B} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$\vec{b}^i \cdot \vec{a}_j = 2\pi\delta^i_j$.

In Komponenten ausgeschrieben: $\left(\vec{b}^i\right)_c \cdot (\vec{a}_j)^c = 2\pi\delta^i_j$.

Mit $\mathcal{B}_j{}^c := (\vec{a}_j)^c$ und $\mathcal{B}^{*i}{}_c := \left(\vec{b}^i\right)_c$ bzw. $(\mathcal{B}^*)^T{}_c{}^i = \mathcal{B}^{*i}{}_c$ lässt sich das schreiben als

$\mathcal{B}_j{}^c\,(\mathcal{B}^*)^T{}_c{}^i = 2\pi\delta^i_j$.

Also, Matrix invertieren, und duale Basisvektoren aus den Zeilen statt Spalten ablesen:

$$2\pi \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = 2\pi \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{a\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}. \rightarrow \mathcal{B}^* = \left\{\vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{a} \\ -\frac{2\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4\pi}{a\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2\pi}{c} \end{pmatrix} \right\}.$$