4. Tutorium **für 31.10.2014**

4.1 Multiple Choice Fragen

a) Schreibe folgenden Kommutator um für Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, und $\mathbf{C}$:
$[\mathbf{A}, \mathbf{B} + \mathbf{C}] =?$
b) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] =?$
c) $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{C}, \mathbf{A}]] + [\mathbf{C}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] =?$
d) Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne den Kommutator der Projektoren $[\mathbf{E}_{\vec{x}}, \mathbf{E}_{\vec{y}}]$.
e) Berechne die Folge $f_n = \vec{x} \cdot (2\mathbf{E}_{\vec{y}} - \mathbf{E}_{\vec{x}})^n (\vec{y} - \vec{x})$ für natürliche n.
f) Wie lauten die Eigenwerte von $2\mathbf{E}_{\vec{y}} - \mathbf{E}_{\vec{x}}$?

4.2 Funktionen von Matrizen

Gegeben seien invertierbare quadratische Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$. Zeige:
a) $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}) = \det \mathbf{B}$ (Hinweis: Produktregel für Determinanten: $\det(\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}) = \det \mathbf{M} \cdot \det \mathbf{N}$).
b) $\mathrm{Tr}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}) = \mathrm{Tr}\mathbf{B}$ (Hinweis: zyklische Vertauschung $\mathrm{Tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{BCA})$).
c) Funktionen von Matrizen lassen sich über deren Taylor-Reihe definieren, z.B. $\exp(\mathbf{A}) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}$. Zeige, dass für invertierbare quadratische Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ gilt:
$e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{B}} \mathbf{A}$.
d) $\exp(i\alpha\sigma_i) = \mathbf{I}\cos(\alpha) + i\sigma_i \sin(\alpha)$, für die Pauli-Matrizen σ_i und reellem α. (Hinweis: Berechne zunächst $(\sigma_i)^2$, $(\sigma_i)^3$, ...)
e) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}}$ für diagonalisierbare Matrizen $\mathbf{A}$ (Hinweis: „Diagonalisiere“ $\mathbf{A}$ über $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}$ und verwende die Produktregel für Determinanten bzw. die zyklische Vertauschung von Matrizen unter der Spur, um $\mathbf{S}$ „loszuwerden“).
f) $\ln(\det \mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\ln \mathbf{B})$ für diagonalisierbare Matrizen $\mathbf{B}$.

4.3 Differentialoperatoren

Vereinfache und berechne mit Hilfe der Indexschreibweise (für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik), wobei $\mathbf{x}$ der Ortsvektor, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ortsabhängige Vektorfelder, $\varphi = \varphi(\mathbf{x})$ ein Skalarfeld und $\mathbf{x}$ der Ortsvektor ist:
a) ∇r mit $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v}$.
c) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$.
d) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$.
e) $\mathbf{A}\left[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A})\right]$.
f) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right)$ mit $r = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2d-f, 3a-c, 3d-f