4. Tutorium - Lösungen **31.10.2014**

- ANMERKUNG: Die Verantwortung beim sinnvollen Umgang mit einem Lösungszettel liegt beim Studierenden! Letztendlich zählt, was man selber dabei lernt!

4.1 Multiple Choice Fragen

a) $[\mathbf{A}, \mathbf{B}+\mathbf{C}] = \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) - (\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA} = [\mathbf{A},\mathbf{B}] + [\mathbf{A},\mathbf{C}]$.
b) $[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} = [\mathbf{A},\mathbf{B}]\mathbf{C} + \mathbf{B}[\mathbf{A},\mathbf{C}]$.
c) $[\mathbf{A},[\mathbf{B},\mathbf{C}]] + [\mathbf{B},[\mathbf{C},\mathbf{A}]] + [\mathbf{C},[\mathbf{A},\mathbf{B}]]$

$= \mathbf{A}(\mathbf{BC}-\mathbf{CB}) - (\mathbf{BC}-\mathbf{CB})\mathbf{A} + \mathbf{B}(\mathbf{CA}-\mathbf{AC}) - (\mathbf{CA}-\mathbf{AC})\mathbf{B} + \mathbf{C}(\mathbf{AB}-\mathbf{BA}) - (\mathbf{AB}-\mathbf{BA})\mathbf{C}$

$= \mathbf{ABC} - \mathbf{ACB} - \mathbf{BCA} + \mathbf{CBA} + \mathbf{BCA} - \mathbf{BAC} - \mathbf{CAB} + \mathbf{ACB} + \mathbf{CAB} - \mathbf{CBA} - \mathbf{ABC} + \mathbf{BAC}$

$= 0.$

Diese Relation ist als Jacobi-Identität bekannt.

d) $\mathbf{E}_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\otimes\vec{x}^T}{\langle\vec{x}|\vec{x}\rangle} = \frac{1}{1^2+0^2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

$\mathbf{E}_{\vec{y}} = \frac{\vec{y}\otimes\vec{y}^T}{\langle\vec{y}|\vec{y}\rangle} = \frac{1}{1^2+1^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

$[\mathbf{E}_{\vec{x}}, \mathbf{E}_{\vec{y}}] = \mathbf{E}_{\vec{x}}\mathbf{E}_{\vec{y}} - \mathbf{E}_{\vec{y}}\mathbf{E}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$.

e) $f_n = \vec{x}\cdot(2\mathbf{E}_{\vec{y}} - \mathbf{E}_{\vec{x}})^n(\vec{y}-\vec{x})$

$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\cdot\left[2\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right]^n\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] \qquad = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^n\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$f_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1.$

$f_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1.$

$f_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2.$

$f_4 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3.$

$f_5 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 5.$

$f_6 = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 8\\8 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 8.$

Das sind die Fibonacci-Zahlen. (1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, ... Allgemein: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.)

Beweis z.B. durch Induktion: Beobachtung: $g_n := \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^n = \begin{pmatrix}f_{n-1} & f_n\\f_n & f_{n+1}\end{pmatrix}$. Stimmt für $n=1$ und 2 (durch direktes Nachrechnen). Gilt dann $g_{n+1} = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^{n+1} = \begin{pmatrix}f_n & f_{n+1}\\f_{n+1} & f_{n+2}\end{pmatrix}$?

$g_{n+1} = \left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^{n+1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right]^n = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}g_n = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{n-1} & f_n\\f_n & f_{n+1}\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1}+f_n & f_n+f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{pmatrix} = g_{n+1}$. OK. Somit gilt $f_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} g_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = f_n$.

f) Berechnung der Eigenwerte:

$\mathbf{M} = 2\mathbf{E}_{\vec{y}} - \mathbf{E}_{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \vec{v} = 0$. $\to$det $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

4.2 Funktionen von Matrizen

a) $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right) = \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) \cdot \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \det\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right) = \det\left(\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\right) = \det \mathbf{B}$.

b) $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right) = \mathrm{Tr}\left(\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\right) = \mathrm{Tr}\mathbf{B}$.

In Indexschreibweise: $\mathrm{Tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right) \to a^{-1}_{ij} b_{jk} a_{ki} = a_{ki} a^{-1}_{ij} b_{jk} = \delta_{kj} b_{jk} = b_{kk} \to \mathrm{Tr}\mathbf{B}$.

c) $e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^3 + \ldots$

$= \underbrace{\mathbf{I}}_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{A}} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\mathbf{A} + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{I}}\mathbf{B}\mathbf{A} + \ldots$

$= \mathbf{A}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{B} + \frac{1}{3!}\mathbf{B}\mathbf{B}\mathbf{B} + \ldots\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.

oder

$e^{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^n\mathbf{A}}{n!} = \mathbf{A}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^n}{n!}\right)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}$.

d) $\exp(i\alpha\sigma_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha\sigma_i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$= \mathbf{I}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha^{2n}}{(2n)!} + i\sigma_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbf{I}\cos(\alpha) + i\sigma_i \sin(\alpha)$,

mit $(\sigma_i)^2 = \sigma_i\sigma_i = \mathbf{I}$, $(\sigma_i)^3 = \sigma_i$, etc.

e) $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = \det\left(e^{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}}\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}e^{\mathbf{A}_D}\mathbf{S}\right) = \det\left(\mathbf{S}^{-1}\right)\det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)\det\left(\mathbf{S}\right) = \det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right)$. Per Konstruktion sind nur Diagonalelemente von $\mathbf{A}_D$ besetzt: $\mathbf{A}_D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right)$.

$$e^{\mathbf{A}_D} = \mathbf{1} + \mathbf{A}_D + \frac{1}{2}\mathbf{A}_D^2 + \ldots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_1^2+\ldots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\lambda_2+\frac{1}{2}\lambda_2^2+\ldots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1+\lambda_n+\frac{1}{2}\lambda_n^2+\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

$$\to \det\left(e^{\mathbf{A}_D}\right) = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} = e^{\lambda_1}e^{\lambda_2}\ldots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n} = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}_D}.$$

Das stimmt mit der rechten Seite überein: $e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}} = e^{\mathrm{Tr}\left(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_D\mathbf{S}\right)} = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}_D} = e^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$.

f) Man könnte analog wie oben die Reihendarstellung verwenden:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (für $-1 < x < 1$), indem man für x die Matrix $x = \mathbf{B} - \mathbf{1}$ einsetzt. (Reihe konvergiert nur, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{B} - \mathbf{1}$ vom Betrag kleiner 1 sind).

Einfacher macht man es sich, indem man $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{B}$ setzt, und die Umkehroperation $\mathbf{B} = \ln \mathbf{A}$ nennt (durch Einsetzten der Reihendarstellungen ineinander sieht man, dass das tatsächlich konsistent ist). Dann folgt:

$\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = e^{\mathrm{Tr}\mathbf{A}} \;\;\rightarrow\;\; \det(\mathbf{B}) = e^{\mathrm{Tr}(\ln\mathbf{B})} \;\stackrel{\ln}{\rightarrow}\; \ln(\det\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\ln\mathbf{B})$.

4.3 Differentialoperatoren

a) $\mathrm{grad} r = \nabla r \rightarrow \partial_i r = \partial_i\sqrt{x_j x_j} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_j x_j}}\left[\underbrace{\left(\partial_i x_j\right)}_{\delta_{ij}} x_j + x_j \underbrace{\left(\partial_i x_j\right)}_{\delta_{ij}}\right] = \frac{2\delta_{ij}x_j}{2r} = \frac{x_i}{r}$.

b) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \rightarrow \partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}}\underbrace{\partial_i\partial_j}_{\text{symmetrisch}} v_k = 0$.

(Ableitungen lassen sich in der Reihenfolge nach dem Satz von Schwarz vertauschen, sofern die Funktion mehrfach stetig differenzierbar ist.)

c) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \rightarrow \varepsilon_{ijk}\partial_j\varepsilon_{klm}\partial_l v_m = \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}\partial_j\partial_l v_m = \underbrace{\partial_j\partial_i v_j}_{\partial_i\partial_j v_j} - \partial_j\partial_j v_i \rightarrow \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}$.

d) $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi \rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{antisymmetrisch}}\underbrace{\partial_j\partial_k}_{\text{symmetrisch}}\varphi = 0$.

Explizit: $\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{-\varepsilon_{ikj}}\partial_j\partial_k\varphi = -\varepsilon_{ikj}\underbrace{\partial_j\partial_k\varphi}_{\substack{=\partial_k\partial_j\varphi \\ \text{(Satz von Schwarz)}}} = -\underbrace{\varepsilon_{ikj}\partial_k\partial_j}_{=\varepsilon_{imn}\partial_m\partial_n}\varphi = -\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi \quad \Rightarrow 2\varepsilon_{ijk}\partial_j\partial_k = 0$.

e) $\mathbf{A}\cdot\left[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})\right] \rightarrow A_i\left[\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}\partial_l A_m\right) - \partial_i\left(\partial_j A_j\right)\right] = A_i\Big[\underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}_{\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}\partial_j\partial_l A_m - \partial_i\partial_j A_j\Big]$

$= A_i\Big[\underbrace{\partial_j\partial_i A_j}_{\partial_i\partial_j A_j} - \partial_j\partial_j A_i - \partial_i\partial_j A_j\Big] = -A_i\left(\partial_j\partial_j A_i\right) \rightarrow -\mathbf{A}\left(\Delta\mathbf{A}\right)$.

f) $\nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{x}}{r^3}\right) \rightarrow \partial_i\left(\frac{x_i}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\underbrace{\left(\partial_i x_i\right)}_{\delta_{ii}=3} + x_i\left(\partial_i\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}3 - x_i 3\frac{1}{r^4}\left(\partial_i r\right) = \frac{3}{r^3} - x_i\frac{3}{r^4}\frac{x_i}{r} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$ (mit $x_i x_i = r^2$).