5. Tutorium **für 07.11.2014**

5.1 Multiple Choice Fragen

a) Berechne $\vec{x} \cdot \operatorname{rot}(\vec{x})$, wobei $\vec{x}$ der Ortsvektor ist (hier und im Folgenden ist in Index-Schreibweise für eine dreidimensionale, orthonormale, euklidische Metrik zu rechnen).
b) Berechne $\operatorname{rot}(\vec{p} \times \vec{x})$, wobei $\vec{x}$ der Ortsvektor und $\vec{p}$ ein konstanter Vektor ist.
c) Berechne $\operatorname{rot}\left(\vec{E} \times \vec{x}\right)$, wobei $\vec{x}$ der Ortsvektor und $\vec{E}(\vec{x})$ ein Vektorfeld ist.
d) Berechne das Flächenintegral $\int\int_B \operatorname{div}\vec{K} dxdy$ für $\vec{K} = \begin{pmatrix} x+y^2 \\ y+x^2 \end{pmatrix}$ und den Bereich B, der von der x-Achse und der Kurve $y = \sin(x)$ für $x \in [0,\pi]$ eingeschlossen wird.
e) Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_1} \vec{K} \cdot \vec{n} ds$, wobei C_1 den Streckenabschnitt entlang der x-Achse beinhaltet.
f) Berechne den Teilabschnitt des Kurvenintegrals $\int_{C_2} \vec{K} \cdot \vec{n} ds$, wobei C_2 die Strecke entlang der Sinusfunktion beinhaltet.

5.2 Spektraltheorem

a) Bestimme die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimme die zugehörigen Projektoren $\mathbf{E}_i$ und überprüfe, dass sich die Matrix $\mathbf{A}$ in der spektralen Form $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathbf{E}_i$ schreiben lässt.
c) Welche Matrix erhält man für $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{E}_i$?
d) Gib Polynome $p_i(t)$ an, für die $p_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ gilt.
e) Überprüfe für eines der Polynome, dass $p_i(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_i$.
f) Zeige allgemein, dass $\exp(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} \exp(\lambda_i)\mathbf{E}_i$ gilt, wobei $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{E}_i$ nach dem Spektraltheorem.

5.3 Vorschau auf die Delta-Distribution[1]

Gegeben sei folgende Funktion[2]:

$$\delta_a(x) = \begin{cases} c & -\frac{1}{a} \leq x \leq \frac{1}{a}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wie muss die Konstante c gewählt werden, damit gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) dx = 1.$$

Verwende im Folgenden diesen Wert für c.
b) Zeichne die Funktion $\delta_a(x)$ für $a = 1$, $a = 2$, $a = 10$. Zeichne auch $\delta_a(x-2)$ für diese Werte von a.
c) Berechne für $f(x) = 2x + 3$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_a(x-b)dx.$$

Vergleiche das Ergebnis mit $f(b)$.
d) Berechne für $g(x) = x^2$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta_a(x-b)dx.$$

Vergleiche das Ergebnis mit $g(b)$. Was passiert für große $a \to \infty$?
e) Könnte man daraus eine allgemeine Regel im Limes für $a \to \infty$ ableiten?

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta(x-b)dx := \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\delta_a(x-b)dx =?$$

f) Wie schaut die zugehörige Stammfunktion $H_a(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta_a(z)dz$ aus?
g) Zeichne die Funktion $H_a(x)$ für $a = 1$, $a = 2$, und $a = 10$.
h) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(-x)dx$.
i) Berechne $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(kx)dx$ mit $k > 0$.

Ankreuzbar: 1a-c, 1d-f, 2a-c, 2d-f, 3a-e, 3f-i

[1]Dies ist eine Vorschau auf die Delta-Distribution, mit mathematischen Mitteln, die bereits bekannt sein müssten. Ziel ist, ein wenig mehr Zeit dafür vor dem Test zur Verfügung zu haben. Rigoros eingeführt werden die generalisierten Funktionen in der Vorlesung in Kapitel 10.

[2]Anmerkung: Die Ähnlichkeit der Funktion $\delta_a(x)$ zu einer Distribution $\delta(x)$ ist nicht unbeabsichtigt, aber betrachte $\delta_a(x)$ vorerst als ganz gewöhnliche Funktion, die von einem Parameter a abhängt.